

Numerische Untersuchung der spannungsangetriebenen
Schmelzsegregation
mit
Anwendung auf einen Plume
unter einem Mittel-Ozeanischen-Rücken

Dissertation zur Erlangung
des Doktorgrades der Naturwissenschaften

vorgelegt beim Fachbereich 11
der Johann Wolfgang Goethe-Universität
in Frankfurt am Main

von

Kristian Müller

aus

Bad Schwalbach

Frankfurt 2005

(D F 1)

vom Fachbereich 11 der

Johann Wolfgang Goethe-Universität als Dissertation angenommen.

Dekan:

Prof. Dr. U. Schmidt

Erster Gutachter:

Prof. Dr. H. Schmeling

Zweiter Gutachter:

Prof. Dr. K. Regenauer-Lieb

Datum der Disputation:

Für meine Eltern

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wird die erstmals von Stevenson (1989) beschriebene spannungsangetriebene Schmelzsegregation, die Kanalisierungsinstabilität, numerisch mit Hilfe des 2D Finite-Differenzen-Codes FDCON (Schmeling, 2000) untersucht.

Diese Untersuchung stellt eine Weiterführung der numerischen Experimente von Richardson *et al.* (1996) und Hall und Parmentier (2000) dar, so dass die Erforschung der Kanalisierungsinstabilität erweitert wird um den Aspekt ihres Verhaltens bezüglich eines äußeren Spannungsfeldes bei verschiedenen initialen Porositätsverteilungen, der Untersuchung der Kanalisierungsinstabilität bei großen Dehnungen und der damit verbundenen Analyse der entstehenden Strukturen, des Einflusses des Auftriebs auf die Ausbildung von Kanalnetzwerken und um die abschließende Prüfung, ob durch ein durch die Kanalisierungsinstabilität ausgebildetes Kanalnetzwerk die Möglichkeit besteht, Schmelze zu einem MOR zu fokussieren.

Die Kanalbildung wird derzeit von Holtzman *et al.* (2003) (Hochdruckexperimente an synthetischem Olivin+MORB¹), Spiegelman (2003) (theoretische Untersuchung der Kanalisierungsinstabilität) und Rabinowicz und Vigneresse (2004) (numerische Simulation und theoretische Betrachtung der Kanalisierungsinstabilität) intensiv untersucht, die Fokussierung der Schmelze behandeln Sparks und Parmentier (1994), Hall und Kincaid (2003) sowie Kühn (in-press).

Viskositätsunterschiede in einer schmelzgefüllten porösen Matrix verursachen bei deren Deformation einen Druckgradienten, welcher die Schmelze in Richtung der maximalen Hauptspannung anreichert und zur Ausbildung von Kanälen, welche eine inhomogene Schmelzverteilung aufweisen, führt. Die Wachstumsrate α dieser Kanäle weist zur Wellenzahl k ($k = 2\pi/\lambda$, mit der Wellenlänge λ einer Porositätsstörung) eine Proportionalität² von $\alpha \sim ak^2/(1+bk^2)$ auf. Dieser Zusammenhang hat zur Folge, dass sich ab einer bestimmten Wellenzahl alle Schmelzverteilungen größerer Wellenzahl gleich stark verstärken. Bisher konnte

¹MORB: Mittelozeanischer Rückenbasalt, „mid-ocean ridge basalt“

² a, b Proportionalitätsfaktoren

Zusammenfassung

in die Theorie für trockene (wasserfreie) Medien kein frühzeitiger Abfall der Wachstumsrate bei großen Wellenzahlen implementiert werden. Rabinowicz und Vigneresse (2004) verwarfen ihren dahin gehenden Ansatz, welcher die Minimierung der Oberflächenenergie (feinstrukturiertes Kanalnetzwerk = große Oberflächenenergie) berücksichtigt, aufgrund zu vereinfachender Annahmen.

Lediglich unter dem Gesichtspunkt der Diffusion von Wasser zwischen der Matrix und der Schmelze und des erweichenden Effekts von Wasser konnte bei einer spezifischen Wellenzahl eine maximale Wachstumsrate gefunden werden (Hall und Parmentier, 2000).

Wie erwähnt, weisen die Kanäle eine inhomogene Schmelzverteilung auf, die dafür verantwortlich ist, dass sich die Schmelze in diesen Kanälen an Maximalstellen weiter anreichert und der Kanal, bedingt durch den aufgeprägten Spannungszustand, schließlich an den verarmten Kanalstellen auseinander gerissen wird. Nachfolgend verbinden sich die hierdurch entstandenen Schmelzlinsen unter der Bildung von „en-échelon arrays“ wieder, wodurch sich wiederum ein langer, in etwa um 45° ausgelenkter³ Kanal bildet. Dieser Heilungsprozess induziert in den hier vorgestellten Experimenten lokale Reine Scherungszustände, die sich mit der ursprünglich vorgegebenen Einfachen Scherung so stark überlagern, dass Reine Scherung in einigen Gebieten vorherrscht. Diese Beobachtungen fanden unter der Bedingung, dass kein Auftrieb zwischen Schmelze und Matrix existiert, statt. Wird dieser Auftrieb hinzugefügt, so ist erkennbar, dass eine Kombination zwischen den die Kanalisierungsinstabilität und den Auftrieb bestimmenden Parametern existiert, bei der sich Solitonen ausbilden. Diese Solitonen folgen bei ihrem schnelleren Aufstieg dem Verlauf der schmelzgefüllten Kanäle und passieren dabei, ohne ihre Form zu verändern, andere kleine Solitonen, die ihren Weg kreuzen. Die durchschnittliche Aufstiegs geschwindigkeit der Solitonen entspricht einem Vielfachen der Aufstiegs geschwindigkeit der Schmelze aufgrund von Segregation. Weiterhin deckt sich die Solitonaufstiegs geschwindigkeit mit der von Schmeling (2000) angegebenen.

³linksdrehendes Koordinatensystem, mit 0° gleich der Vertikalen

Zusammenfassung

In der initialen Bildungsphase konnten die von Holtzman *et al.* (2003) gefundenen Auslenkwinkel der Kanäle von 60° reproduziert werden. Bei anhaltender Dehnung unterscheiden sich allerdings die Ergebnisse dieser Arbeit von denen von Holtzman *et al.*. Letztere weisen jedoch selbst darauf hin, dass die von ihnen untersuchte Kanalisierungsinstabilität eher auf einem „damage mechanism“ (Bercovici *et al.*, 2001) beruht. Weiterhin erklären sie ihre großen Winkel zur Normalen mit einer Superpositionierung zwischen dem bevorzugten Kanalisierungsinstabilitätswinkel von 45° und einem horizontal verlaufenden „shear partitioning“. In der Theorie Stevensons (1989) wird dieses Partitionieren nicht berücksichtigt. Außerdem liefen die Experimente von Holtzman *et al.* wesentlich langsamer ab als die dieser Arbeit, wodurch meiner Meinung nach Holtzman *et al.* nicht den Bedingungen genügten, um diese Effekte zu beobachten. Diese Vermutung stützt sich auf die Tatsache, dass der von Holtzman *et al.* eingeführte Quotient $\zeta = \delta_c/h$ (δ_c Kompaktionslänge (McKenzie, 1984) und h Höhe des Modells), welcher sich umgekehrt proportional zur Ausprägung der Kanalisierungsinstabilität verhält, bei ihren Experimenten bei $0.05 - 10.5$ lag, während er in dieser Untersuchung unter 0.01 liegt; demnach die von mir vorgestellten Untersuchungen in etwa eine Größenordnung schneller abliefen als die von Holtzman *et al.*.

Weiterhin konnte die Erhaltungsgleichung für Wasser erfolgreich in FDCON implementiert und ausgetestet werden. Die Vermutung von Hall und Parmentier (2000), dass der Einfluss von Wasser verstärkend auf die Kanalisierungsinstabilität wirkt, konnte nicht bestätigt werden. Es konnte sogar das Gegenteil festgestellt werden, nämlich, da aufgrund des gelösten Wassers das Gesamtsystem erweicht, tritt eine Abschwächung der Kanalisierungsinstabilität für kleine Wellenzahlen auf.

Der Versuch der Anwendung der bisher erzielten Ergebnisse auf die Interaktion eines aufsteigenden Plumes mit einer spreizenden Kruste erbrachte keine direkte Fokussierung der Schmelze zum MOR hin. Die Spannungsverteilung dieser Experimente zeigt, dass der Plumestamm aufgrund eines defokussierenden Kanalnetzwerks im Stamm sowie eines nahezu vertikal verlaufenden Kanalnetzwerks am Rand des Plumestammes von einer Zone erhöhter Schmelzkonzentration ummantelt sein könnte. In dieser Ummantelung steigt die Schmelze

Zusammenfassung

dann in vertikal verlaufenden Kanälen auf, wobei sie in den hier vorgestellten Experimenten (Plumekopfausdehnung ≈ 150 km) in einer Entfernung von ≈ 100 km zum MOR auf die Lithosphärenunterseite (Tiefe ≈ 50 km) treffen würde. Aufgrund der Lithosphärenstruktur (\sqrt{t} -Gesetz) könnte die Schmelze an der schrägen Lithosphärenunterseite zum MOR hin strömen (Sparks und Parmentier, 1994; Hall und Kincaid, 2003).

Diese Prozesse (Kanalisierungsinstabilität, Entlangströmen der Schmelze an der Lithosphärenunterseite (Sparks und Parmentier, 1994; Hall und Kincaid, 2003) und Recyclingprozess der Schmelze) stellen das Erklärungsmodell dieser Arbeit dar, wie eine Fokussierung von Schmelze zum MOR bei einer Interaktion von diesem mit einem Plume aussehen könnte. Dieses Erklärungsmodell konnte jedoch aufgrund mangelnder Gitterauflösung nicht mit FDCON modelliert werden (Kap. 6.11).

1	Einleitung	1
1.1	Vorkommen partieller Schmelzregionen	1
1.2	Bildungsprozess der Schmelze	3
1.2.1	Schmelzbildung	3
1.2.2	Porositäts-Permeabilitätsbeziehung	5
1.3	Segregationsmodelle	5
1.3.1	Bronchial-System: Chemisch reaktiver poröser Fluss	7
1.3.2	Spannungsangetriebene Schmelzsegregation: Die Kanalisierungsinstabilität	10
1.4	Die Rolle von Wasser im Mantel	14
1.4.1	Herkunft und Speicherstätten von Wasser im Mantel	14
1.4.2	Verteilung des Wassers im Mantel	14
1.4.3	Einfluss von Wasser auf die Rheologie und die Kanalisierungsinstabilität	15
1.5	Numerik	16
1.6	Zusammenfassung der Fragestellung	17
 2	 Physikalisches Modell	 19
2.1	Isothermie	19
2.2	Erhaltungsgleichungen	20
2.2.1	Erhaltungsgleichungen für die Masse	20
2.2.2	Gleichungen für die Impulserhaltung	22

2.2.3	Die Stromfunktion	23
2.3	Die Compaction Boussinesq Approximation	24
2.4	Spannungs-Dehnungsraten-Beziehung	25
2.4.1	Ausrichtung der maximalen Kompressionsspannung	26
2.5	Einfache Scherung und Reine Scherung	28
2.5.1	Implementierung und Simulation Einfacher Scherung	29
2.5.2	Simulation Reiner Scherung	31
2.5.3	Superpositionierung Einfacher und Reiner Scherung	32
2.6	Viskositätsgesetze	32
2.6.1	Die effektive Scherviskosität η_s	33
2.6.2	Die effektive Volumenviskosität η_b	33
2.6.3	Der Einfluss von Wasser auf die Rheologie	36
2.7	Die Permeabilitäts-Porositätsbeziehung	37
2.8	Die Kompaktionslänge und -zahl	38
2.8.1	Die Kompaktionslänge	38
2.8.2	Die Kompaktionszahl	39
2.9	Normierung	39
2.9.1	Die Schmelz-Retentionzahl Rtn	40
2.9.2	Die Aufstiegszahl AZ	40
2.9.3	Die Wellenzahl k'	40
2.10	Die Wirbelstärke	41
3	Die Kanalisierungsinstabilität	43
3.1	Der Einfluss der Rheologie auf die Kanalisierungsinstabilität	47
3.2	Die Kanalisierungsinstabilität bei großen Wellenzahlen	48

4	Wasser in FDCON	51
4.1	Die Erhaltungsgleichung für das Wasser	51
4.1.1	Der Partitionskoeffizient von Wasser	52
4.2	Der Einfluss von Wasser auf die Kanalisierungsinstabilität	52
5	Weiterentwicklung von FDCON	57
5.1	Verbesserung der Genauigkeit	57
5.2	Endliche Dehnung bei Einfacher Scherung	63
5.3	Implementierung der Wassererhaltungsgleichung in FDCON	64
6	Ergebnisse und Auswertung	67
6.1	Bestimmung der Wachstumsrate aus den numerischen Ergebnissen	67
6.2	Reproduziert FDCON die analytische Wachstumsrate?	70
6.2.1	Variation des Kohlstedt Faktors a_1	74
6.3	Parameterstudie: Auflösung des FDCON-Gitters	77
6.4	Initiale Porositätsfelder	79
6.5	Parameterstudie: Gibbs'sche Überschwinger	82
6.6	Parameterstudie: Einfache Scherung	87
6.6.1	1D Sinus	88
6.6.2	1D Ellipse	93
6.6.3	Ellipse	96
6.6.4	Resultate der Parameterstudien Einfache Scherung	98
6.7	Parameterstudie: Reine Scherung	100
6.8	Parameterstudie: Zufällige Porositätsverteilung	101

6.8.1	Scherdehnungsexperimente: Kleine Dehnung	104
6.8.2	Scherdehnungsexperimente: Große Dehnung	109
6.8.3	Detailauswertung	111
6.9	Untersuchungen mit vergrößerten Boxdimensionen	119
6.10	Parameterstudie: Einfache Scherung mit Auftrieb	124
6.11	Interaktion zwischen Plume, Lithosphäre und Kanalisierungsinstabilität . .	134
7	Diskussion und Zusammenfassung	145
	Danksagung	153
A	Verwendete Symbole und deren Wertebereiche	155
A.1	Verwendete Symbole	155
A.2	Wertebereich ausgewählter Symbole	157
B	Versuchsreihenliste	159
C	Lineare Stabilitätsanalyse der Kanalisierungsinstabilität	161
C.1	Grundzustand (Basic state) für Reine Scherung	161
C.1.1	Grundzustand Massenerhaltung der Schmelze	162
C.1.2	Grundzustand Massenerhaltung der Matrix	162
C.1.3	Grundzustand Impulserhaltung der Matrix	162
C.1.4	Grundzustand Impulserhaltung der Schmelze	163
C.2	Perturbation	163
C.2.1	Rheologie	164
C.2.2	Die Massenerhaltung der Schmelze mit Perturbation	165

C.2.3	Die Massenerhaltung der Matrix mit Perturbation	166
C.2.4	Reduzierter Grundzustand	167
C.2.5	Die Impulserhaltung der Matrix des reduzierten Grundzustandes . .	167
C.2.6	Die Impulserhaltung der Schmelze des reduzierten Grundzustandes	168
C.3	Konvektive Ableitung der Massenerhaltung der Schmelze	168
C.4	Konvektive Ableitung der Massenerhaltung der Matrix	169
C.5	Die Partikelpfadgleichung der Porositätsamplitude	169
C.6	Lösungsansatz	170
C.7	Lösung des Kanalisierungsinstabilitäts-Problems	171
C.8	Auswirkungen der CBA	172
D	Effektive Viskosität	173
	Abbildungsverzeichnis	174
	Tabellenverzeichnis	178
	Literaturverzeichnis	179

Der Gelehrte studiert die Natur nicht, weil das etwas Nützliches ist. Er studiert sie, weil er daran Freude hat, und er hat Freude daran, weil sie so schön ist. Wenn die Natur nicht so schön wäre, so wäre es nicht der Mühe wert, sie kennen zu lernen, und das Leben wäre nicht wert, gelebt zu werden. Henri Poincaré (1854-1912)

Partiell geschmolzene Regionen des Erdmantels sind ein ergiebiges Forschungsgebiet für Theoretiker, Experimentalphysiker, Observierer und Geodynamiker. So werden unter anderem der Prozess des Schmelzaufstiegs, die Schmelzakkumulation sowie die Fokussierung der Schmelze zu ihren Austrittsgebieten erforscht. Seit geraumer Zeit gewinnt aber auch die Interaktion von gelöstem Wasser im Mantel mit den eben erwähnten Prozessen zunehmend an Interesse.

Diese Arbeit reiht sich in die aktuelle Forschung der Schmelzakkumulation unter rein mechanischen Randbedingungen ein. So wird unter anderem der Einfluss des Spannungsfeldes auf die Reorganisation der Schmelze untersucht und welche Effekte auftreten, wenn zusätzlich der Einfluss von Wasser auf die Rheologie berücksichtigt wird. In dieser Einleitung wird ein Überblick über die Lokationen partiell geschmolzener Regionen, die dort stattfindenden Bildungsprozesse der Schmelze, die organisierte Segregation derselben und der Einfluss von Wasser auf diese Prozesse gegeben. Die Arbeit geht nachfolgend auf einige dieser genannten Prozesse tiefer ein. Die exakten Fragestellungen dieser Arbeit sind am Ende der Einleitung zusammengefasst (Abschnitt 1.6).

1.1 Vorkommen partieller Schmelzregionen

Partiell geschmolzene Regionen kommen unter anderem unterhalb mittelozeanischer Rücken, über Subduktionszonen, in aufsteigenden Plumes und innerhalb von Scherzonen unterhalb der Kruste vor. Diese Schmelzregionen können z.B. durch lokale Tomographien entdeckt,

jedoch nur bedingt vermessen werden. So zeigen lokale Tomographiestudien in Island eindeutig, dass sich darunter eine mehrere hundert Kilometer breite, negative seismische Geschwindigkeitsanomalie befindet (Allen *et al.*, 2002).

Eine Erniedrigung der seismischen Geschwindigkeiten wird im allgemeinen mit einer Erhöhung der Temperatur, mit Auftreten von Wasser oder einer kompositionellen Änderung des durchdrungenen Materials assoziiert. Die Erhöhung der Temperatur und damit die evtl. Überschreitung des Solidus bzw. dessen Absenken aufgrund von Wasser kann wiederum zu einem partiellen Aufschmelzen der Gesteinsmatrix führen.

Am Beispiel von Island treten partielle Schmelzregionen aufgrund dieser drei Effekte auf (Ruedas, 2004, Kap. IV):

- Die Erhöhung der Temperatur wird durch heißes, konzentriert unter Island aufsteigendes Mantelmaterial erzeugt, dem Island Plume.
- Durch den Island Plume wird Wasser aus der Übergangszone in diese Regionen transportiert.
- Der kompositionelle Aufbau von Island weist große Heterogenitäten auf.

Partiell aufgeschmolzene Zonen treten nicht nur im Zusammenhang mit einem Plume auf, sondern bilden sich auch unter mittelozeanischen Rücken aus. In Abbildung 1.1 ist skizziert, wie eine partiell aufgeschmolzene Region unterhalb eines Rückens strukturell aufgebaut sein könnte. Diese Skizze zeigt, dass zentriert unter dem Rücken in einem Tiefenbereich von bis zu 7 km partiell aufgeschmolzene Matrix vorhanden sein kann. Weiterhin tritt in einer Tiefe von 50 – 120 km aufgrund von Dekompressionsschmelzen ein verbundenes Schmelzgebiet auf. Der Zwischenbereich kann ebenfalls Schmelze aufweisen, welche jedoch nicht zwingend verbunden sein muss.

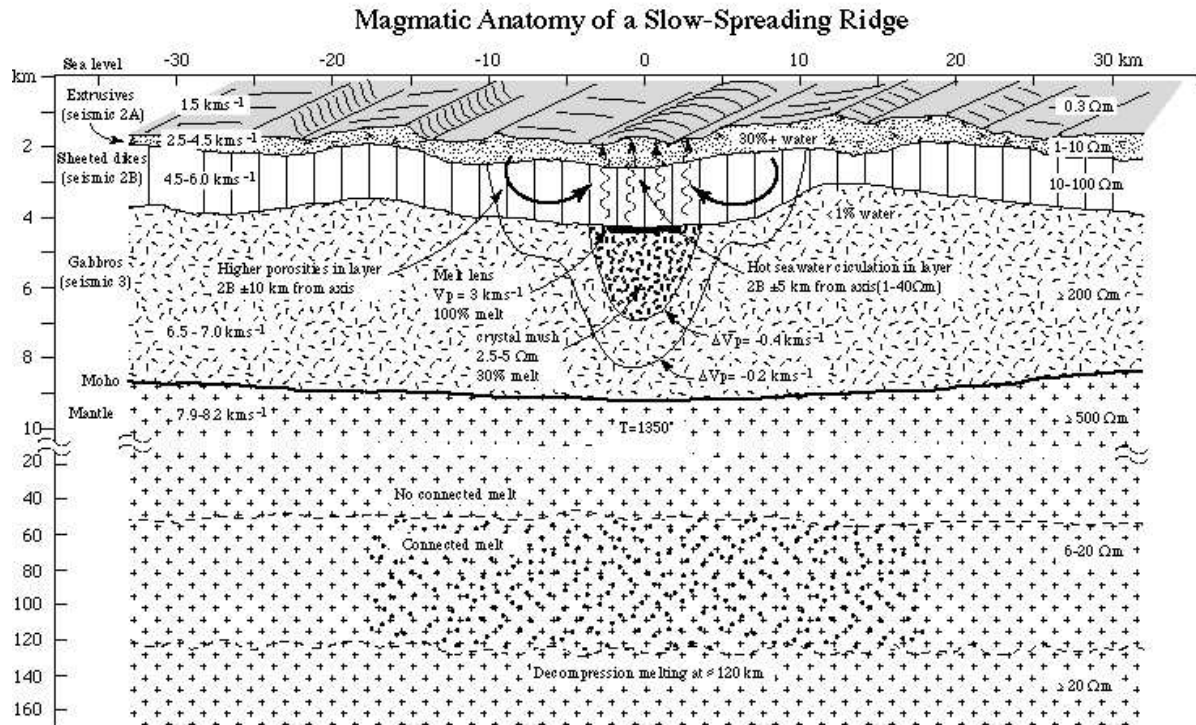


Abbildung 1.1. Struktureller Aufbau des oberen Mantels unter einem Mittel-Ozeanischen-Rücken (RAMESSES Projekt, Sinha et al. (1998)). Mit freundlicher Genehmigung von Blackwell Publishing (Oxford).

1.2 Bildungsprozess der Schmelze

1.2.1 Schmelzbildung

Das Überschreiten der Solidustemperatur des Mantelgesteins (Peridotit) führt zur Bildung von basaltischen Schmelzen. Dies erfolgt bevorzugt in zwei Tiefenbereichen:

In einem Tiefenbereich von 30 – 80 km kann unter einem MOR¹ ein Aufschmelzprozess aufgrund von Dekompressionsschmelzen erfolgen (Kelemen *et al.*, 1997). In Regionen, in

¹MOR: Mittelozeanischer Rücken, „mid-ocean ridge“

denen heißes Plumematerial aufsteigt, erfolgt der Aufschmelzprozess hingegen in einem Tiefenbereich von 120 – 170 km (Ruedas, 2004). Das Aufschmelzen in diesen Tiefen wird durch die erhöhte Temperatur des Plumematerials, aber auch durch die Absenkung des Solidus aufgrund von Wasser, welches aus der Übergangszone² herauf transportiert wird, ausgelöst (Inoue, 1994).

Für den Aufschmelzprozess und das weitere Verhalten der Schmelze in der Matrix existieren diverse Modelle („Batch Melting“, „Fractional Melting“, „Magma Mixing“ und „Incremental Melting“).

Batch Melting

Die erzeugte Schmelze verbleibt in der Matrix, sammelt sich dort an und wird dem System ggf. als Ganzes z.B. durch Segregation entzogen. Da die Schmelze dem System nicht sofort entzogen wird, kann sie mit der Matrix solange reagieren, bis sich ein für den Schmelzprozess charakteristisches chemisches Gleichgewicht zwischen ihnen eingestellt hat.

Fractional Melting Modell

Die erzeugte Schmelze wird der Matrix sofort entzogen. Hierdurch bleibt verarmtes Mantelgestein (Harzburgit) zurück (Basu, 2002). Durch diesen Prozess verändert sich die chemische Zusammensetzung des Systems kontinuierlich. Charakteristisch für diesen Prozess ist, dass sich die erzeugte Schmelze nicht im chemischen Gleichgewicht mit der Matrix befindet.

Der genaue Vorgang der Schmelzextraktion kann mittels geophysikalischer Methoden nur schwer unterschieden werden. Eine Möglichkeit der Unterscheidung bietet die Geochemie. Aufgrund geochemischer Prozesse reichern sich in der Schmelze dem Mantelgestein inkompatible Elemente wie z.B. Uran, Thorium und eine Vielzahl von REE³, je länger sie mit dem Quellgebiet in Kontakt bleibt, unterschiedlich stark an. Demzufolge kann, wenn noch kein Gleichgewichtszustand erreicht ist, z.B. aus dem Verhältnis von Uran und Thorium

²Übergangszone: Tiefenbereich zwischen der 410 und 660 km Diskontinuität

³REE: Seltene Erden, „Rare Earth Element“

die Verweildauer der Schmelze im Quellgebiet bestimmt werden, und hieraus können dann Rückschlüsse auf den Extraktionsprozess gezogen werden.

1.2.2 Porositäts-Permeabilitätsbeziehung

Sind die Bedingungen zur Schmelzbildung geschaffen, so zeigen laborgestützte Messungen, dass sich die Schmelze anfangs in Kornzwickeln bildet und sich erst allmählich mit zunehmender Porosität über die Korngrenzen mit anderen Zwickeln verbindet (Faul, 1997). Untersuchungen der elektrischen Leitfähigkeit in Abhängigkeit der Porosität eines Materials könnten solch ein Verhalten der Schmelze bestätigen (Maumus, 2004). So ist ein Ergebnis der Arbeit von Maumus, dass die elektrische Leitfähigkeit bei steigender Porosität anfänglich nicht zunimmt und ab einem gewissen Schmelzgrad ein Leitfähigkeitssprung auftritt. Dieser Effekt könnte ein Indiz dafür sein, dass zuerst unverbundene Schmelzlinien entstehen, die die Leitfähigkeit kaum beeinflussen, und diese sich erst, wenn sich genügend Schmelze gebildet hat, über die Korngrenzen hinweg verbinden und so die Leitfähigkeit sprunghaft erhöhen.

Dass sich die Permeabilität sprunghaft mit der Porosität verändert, zeigt deutlich, welche komplizierte Vorgänge bei der Betrachtung dieser beiden Größen auftreten können. In dieser Arbeit werden solche Effekte vernachlässigt und eine vereinfachte, aus der Theorie abgeleitete, generalisierte Porositäts-Permeabilitätsbeziehung verwendet, die der Proportionalität $k \approx \varphi^n$ folgt, mit $n \geq 2$ (Faul, 1997). In Kapitel 2.7 wird näher auf diese Beziehung eingegangen.

1.3 Segregationsmodelle

Geochemische Beobachtungen von Stolper (1980) und Suhr (1998) sowie Feldbeobachtungen am Ingalls Ophiolith (Washington Cascades) von Kelemen *et al.* (2000) weisen auf einen effizienten Mechanismus der Schmelzextraktion hin.

So zeigt Suhr (1998), dass ophiolitischer Mantelperidotit sowohl in Spuren- als auch in den Hauptelementen im chemischen Ungleichgewicht mit primitiver, aus ozeanischen Spreitungscentren stammender, Schmelze ist. Dies deutet darauf hin, dass die Schmelze dem System wesentlich schneller entzogen wurde als es durch alleinige Perkolation möglich wäre, da sonst die Schmelze, falls diese lediglich durch eine langsame poröse Strömung zu ihrem Austrittsgebiet gelangt wäre, genügend Zeit gehabt hätte, dieses chemische Ungleichgewicht teilweise oder gar ganz abzubauen.

Infolgedessen muss sich die Schmelze in irgendeiner Art und Weise organisieren und Bereiche mit erhöhter Durchflussmenge schaffen. In der anfänglich partiell aufgeschmolzenen Matrix kann eine Organisierung der Schmelze nur durch Segregation erfolgen. Hat sich die Schmelze zu Bereichen mit erhöhter Schmelzkonzentration (gleich erhöhter Durchflussmenge) zusammengefunden, wird der weitere Extraktionsprozess durch kanalisierte Perkolation (Kelemen *et al.*, 1997) bis hin zu einem Fluss in offenen Kanälen erfolgen (Nicolas, 1986; Hart, 1993; Richardson *et al.*, 1996).

Weiterhin zeigen die Feldbeobachtungen von Kelemen *et al.* (2000), dass sich solch ein Kanalsystem in dem untersuchten Ophiolit ausgebildet hat. Als ein Ergebnis ihrer Untersuchung ergibt sich, dass ein Potenzgesetz zwischen der Dicke eines Kanals (Querschnitt) und deren Anzahl besteht. Je kleiner die Kanäle sind, desto häufiger treten sie auf. Aufgrund dessen sind sie der Meinung, dass die Schmelzextraktion im Mantel durch ein sich fraktal verzweigendes Netzwerk, eine Art „Bronchial-System“ oder „root tree system“⁴, stattfindet, wobei die kleinen Verästelungen im Quellgebiet liegen und sich zu immer größer werdenden Kanälen, die zum Austrittsgebiet hin verlaufen, zusammenfinden.

Ein weiteres Indiz für eine Organisierung der Schmelze ist, dass bei MOR das Austrittsgebiet der Schmelze klein ist (einige Kilometer, (Vera *et al.*, 1990)), während das Quellgebiet leicht hundert und mehr Kilometer umfassen kann (Forsyth *et al.*, 1998). Folglich muss die Schmelze zum Austrittsgebiet hin fokussiert werden. Eine Möglichkeit der Fokussierung wäre, dass die Schmelze senkrecht vom Quellgebiet aufsteigt und dann an der zum Aus-

⁴„root tree system“, ein System welches wie eine Baumwurzel aufgebaut ist.

trittsgebiet hin geneigten Unterseite (\sqrt{t} Gesetz) der Lithosphäre zu diesem geleitet wird. Dass solch eine Fokussierung möglich ist, zeigen numerische Untersuchungen von Sparks und Parmentier (1994) und numerische „off-axis plume-ridge interaction“ Modelle von Hall und Kincaid (2003).

Die Bildung solcher Bronchial-Systeme bzw. die Bildung von Kanälen wird derzeit durch unterschiedliche Theorien beschrieben. Zwei dieser Theorien (Kanalbildung aufgrund eines chemisch reaktiven porösen Flusses (Hart, 1993; Aharonov *et al.*, 1995; Spiegelman *et al.*, 2001) und Bildung von Kanälen aufgrund von spannungsgetriebener Schmelzsegregation (Stevenson, 1989; Richardson, 1998; Holtzman *et al.*, 2003; Spiegelman, 2003)) werden im Rahmen dieser Arbeit/Einleitung beschrieben, wobei die letztere Untersuchungsgegenstand dieser Arbeit ist.

1.3.1 Bronchial-System: Chemisch reaktiver poröser Fluss

In einem System, in dem sich die Löslichkeit eines Minerals, in diesem Fall Pyroxen, in der Schmelze erhöht, wenn der Druck in dem Schmelzgebiet abnimmt, kann sich ein selbst verstärkender Prozess ausbilden (Kelemen *et al.*, 1995):

Regionen mit erhöhtem Schmelzdurchsatz (Kanäle), welche Regionen verringerten Drucks darstellen, führen zu einer Erhöhung der Löslichkeit des dort befindlichen Pyroxens. Infolgedessen in diesen Bereichen mehr Matrix aufgelöst wird, was ein Wachsen des Kanalquerschnittes bewirkt und somit in einer Zunahme der Porosität resultiert. Dies hat zur Folge, dass sich der Schmelzdurchsatz verstärkt, der Druck weiter abfällt und sich so der selbst verstärkende Prozess einstellt, der durch die erhöhte Löslichkeit vorhandene Kanäle vergrößert, aber auch durch den sich ausbildenden Druckgradienten Schmelze in diesen fokussiert.

Dieser Prozess ist in der Literatur als „chemisch reaktiver poröser Fluss“ bekannt und analytisch wie auch numerisch von Aharonov *et al.* (1995), Hart (1993), Kelemen *et al.* (2000) und Spiegelman *et al.* (2001) analysiert worden. Das sich ausbildende Netzwerk besteht

entweder aus vertikalen Kanälen (Aharonov *et al.*) oder aber aus einer Art bronchialen System (Hart; Kelemen *et al.*; Spiegelman *et al.*).

Die numerischen Untersuchungen des chemisch reaktiven porösen Flusses von Spiegelman *et al.* zeigen bei einer Damköhlerzahl⁵ von $Da = 40$ und einer Pecletzahl⁶ von $Pe = 40$, dass im Endstadium dieses Versuches ($t = 116 \frac{\delta_c}{p}$, mit $p \approx 50 \text{ m a}^{-1}$ Perkolationsgeschwindigkeit und δ_c , der von McKenzie (1984) eingeführten Kompaktionslänge⁷) eine Porositätsverteilung (Kanalsystem) erreicht wird, bei der 94% des vertikalen Schmelzdurchflusses in nur 24% des zur Verfügung stehenden Raumes erfolgen (Spiegelman Abb. 2.a).

Des Weiteren zeigen Spiegelmans (2001) Untersuchungen, dass die Porosität im Kanal um so schneller anwächst, je größer die Bereitschaft (große Da -Zahl) der Schmelze ist, das chemische Ungleichgewicht auszugleichen (Spiegelman *et al.*, 2001, Kap. 3.1), sowie dass die Wachstumsrate der Porosität und der Abstand der Kanäle untereinander prinzipiell von dem Produkt $DaPe$ abhängt (Spiegelman *et al.*, 2001, Kap. 3.2). Aus Spiegelmans Abbildung 3, welche das Resultat ihrer linearen Stabilitätsanalyse visualisiert, ist ersichtlich, dass für ein $DaPe$ -Produkt in einem Wertebereich von $100 < DaPe < 25600$ die maximale Verstärkung bei einer Wellenzahl⁸ von $k = 2 - 5 \cdot \delta_c^{-1}$ liegt. Dieser Wellenzahlbereich spiegelt sich ebenfalls in den Feldbeobachtungen von Kelemen *et al.* (2000) wider.

Jedoch deuten Spiegelman *et al.* (2001, Kap. 4.2.3) in ihren generellen Experimenten zum chemisch reaktiven porösen Fluss an, dass bei ihren numerischen Simulationen das sich ausbildende Bronchial-System nicht genügend fokussiert, um Schmelze aus einer Quellregion (100 km tief und 100 km breit), zu ihrem 5 km breiten Austrittsgebiet zu transportieren, demzufolge weitere Kanalisierungsprozesse wirken müssen.

⁵Damköhlerzahl: Reaktionsbereitschaft der Schmelz pro advektierte Kompaktionslänge; eine große Damköhlerzahl bedeutet eine reaktionsfreudige Schmelze; Wertebereich in Spiegelmans Experimenten: $10 \leq Da \leq 160$

⁶Pecletzahl: Diffusion bzw. Dispersion, die pro advektierte Kompaktionslänge stattfindet; eine große Pecletzahl bedeutet vernachlässigbare Diffusion; Wertebereich in Spiegelmans Experimente: $10 \leq Pe \leq 160$

⁷ $\delta_c = \sqrt{(\frac{4}{3}\eta_s + \eta_b) k_\varphi / \eta_f}$, mit η_s effektive Scherviskosität, η_b effektive Volumenviskosität, k_φ porositätsabhängige Permeabilität (Kap. 2.8).

⁸ $k = 2\pi/\lambda$, mit λ der Wellenlänge einer Porositätsstörung

Die von Hart (1993) untersuchte Instabilität, der ebenfalls ein sich ausbildendes Bronchial-System zugrunde liegt, beruht wie bei Spiegelman *et al.* (2001) auf einer möglichst großen Pecletzahl Pe . Die Pecletzahl Pe gibt bei beiden diesbezüglichen Untersuchungen an, ob die Schmelze über eine advektierte Kompaktionslänge mittels Diffusion chemische Teilchen mit der Matrix austauschen konnte, um so ggf. ein bestehendes chemisches Ungleichgewicht abzubauen. Ist Pe groß, spielt diese Diffusion keine Rolle. So ist nach Hart und Spiegelman *et al.* die Instabilität des chemisch reaktiven porösen Flusses um so stärker, je höher Pe . Jedoch weist Hart auf zwei Probleme hin, die eine Erniedrigung von Pe und infolgedessen eine Abschwächung zur Folge haben könnten:

Zum einen kann sich, sollte die Schmelze bei ihrem Aufstieg stagnieren, das chemische Ungleichgewicht ausgleichen, und die Instabilität könnte zum Erliegen kommen. Zum anderen vermischt sich im chemischen Ungleichgewicht befindliche Schmelze beim Aufsteigen mit neu produzierter, im chemischen Gleichgewicht befindlicher Schmelze aus höher liegenden Regionen. Durch diese Vermischung entsteht zwar ebenfalls wieder eine chemisch unausgeglichene Schmelze, diese weist allerdings ein schwächeres chemisches Ungleichgewicht auf, wodurch es ebenfalls zu einer Abschwächung oder gar zum Erliegen der Instabilität kommen könnte.

Da jedoch Schmelze, welche sich im chemischen Ungleichgewicht befindet, beobachtet wird, treten entweder diese zwei Ausgleichsprozesse gar nicht oder nur in abgeschwächter Form auf, oder es müssen noch ein oder mehrere weitere Prozesse existieren, die unabhängig von einem chemischen Ungleichgewicht agieren. Auf einen dieser Prozesse wird im nachfolgenden Kapitel näher eingegangen.

1.3.2 Spannungsangetriebene Schmelzsegregation:

Die Kanalisierungsinstabilität

Der hier vorgestellte und im Rahmen dieser Arbeit ausgiebig durch numerische Methoden untersuchte Kanalisierungsprozess ist rein mechanischen Ursprungs:

Wird ein Zweiphasensystem, bestehend aus einer hochviskosen, deformierbaren Matrix und einer niederviskosen Schmelze, einer zweidimensionalen Deformation⁹ ausgesetzt, tritt ein Kanalisierungsprozess ein. Wenn keine Schmelzmigration stattfindet, dann fordert die Kräfteerhaltung unter Vernachlässigung von Gravitation, Oberflächenspannungen zwischen Schmelze und Matrix sowie jeglicher Variation in z -Richtung, dass die Normalspannung σ_{xx} konstant ist (Stevenson, 1989). Hieraus ergibt sich für das System

$$\sigma_{xx} = -P + 2\eta_s \dot{\epsilon}_0. \quad (1.1)$$

P Druck, η_s Scherviskosität der Matrix, $\dot{\epsilon}_0$ Dehnungsrate

Unter der Annahme kleiner Porositätsvariationen in x -Richtung und dass eine niedrige Porosität mit einer hohen Viskosität verknüpft ist (Kohlstedt *et al.*, 2000), sowie unter der Nebenbedingung, dass die Normalspannung σ_{xx} an der Grenzfläche zwischen Schmelze und Matrix stetig ist, folgt, dass die höher porösen Gebiete Regionen erniedrigten Drucks sind sowie vice-versa. Dies führt dazu, dass Schmelze in die Tiefdruckgebiete fließt und es so zu einer weiteren Erhöhung der Porosität in diesen Gebieten kommt, was zu einem sich selbst verstärkenden Prozess führt, der parallel zur maximalen Kompressionsspannung (MKS) Kanäle ausbildet (Kap. 3 sowie Anhang C).

Diese Instabilität wurde anfänglich für eindimensionale Strukturen von Stevenson (1989) numerisch und analytisch untersucht. Er fand, dass sich ein Kanalnetzwerk ausbildet, welches eine Längenskala aufweist, die kleiner als die der Kompaktionslänge, aber größer als

⁹hier am Beispiel der Reinen Scherung mit einer Hintergrunddeformierung von $\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{zz} = \dot{\epsilon}_0 = \text{konst.} > 0$

die Korngröße ist. Richardson (1998) erweiterte die 1D Untersuchungen von Stevenson auf einen 2D Fall unter der Dehnungsbedingung Reiner Scherung. Seine Resultate zeigen ebenfalls, dass sich die Schmelze parallel zur MKS ausrichtet.

Die Porosität eines Kanals wächst proportional zu $a k^2 / (1 + b k^2)$ an. Dies führt dazu, dass sich eine konstante maximale Wachstumsrate für Wellenzahlen $k \gg \delta_c^{-1} = \varsigma$ ausbildet (Kap. 3 sowie Abb. 6.2 in Kap. 6.2).

Die reziproke Kompaktionslänge, die Kompaktionszahl $\varsigma = \delta_c^{-1}$ (Kap. 2.8.2), bestimmt den Übergang zwischen dem ansteigenden Ast der Wachstumsrate ($k < \varsigma$) und dem horizontal ($k > \varsigma$) verlaufenden. Die gleichmäßige Verstärkung der Porosität im Bereich großer Wellenzahlen induziert bei der numerischen Analyse der Instabilität allerdings eine von der Gitterauflösung abhängige Wachstumsrate; hierauf weist ebenfalls Richardson (1998) hin. Eine weiterführende Analyse dieser Problematik erfolgt in Kapitel 6.3.

Das Problem, dass sich Schmelzinklusionen mit Wellenzahlen k größer als die Kompaktionszahl ς alle gleich stark verstärken, ist bisher nur unbefriedigend gelöst worden. Theoretisch können sich zwar beliebig kleine Inklusionen verstärken und ggf. ein Netzwerk bilden, aber rein physikalisch sollte sich kein Netzwerk ausbilden, dessen Kanäle einen geringeren Abstand als die Korngröße aufweisen. Rabinowicz und Vigneresse (2004) versuchten durch Berücksichtigung von oberflächenenergetischen Einflüssen¹⁰ ein Abfallen der Wachstumsrate bei Wellenzahlen k , die größer als die Kompaktionszahl ς sind, in die Theorie der Kanalisierungsinstabilität für trockene Medien aufzunehmen. Allerdings vernachlässigten Rabinowicz und Vigneresse diesen Effekt bei ihrer analytischen Lösung der Kanalisierungsinstabilität wieder, da bei einer Betrachtung kleiner Porositätsperturbationen die Energieeinflüsse nur zweiter Ordnung sind, wobei sie darauf hinweisen, dass dadurch eine Übersimplifizierung des Gesamtprozesses erfolgt. Diese Übersimplifizierung führt wiederum dazu, dass ihre Analyse ebenfalls eine Wachstumsrate, die proportional zu $a k^2 / (1 + b k^2)$ ist, liefert. Trotzdem sind sie der Meinung, dass bei größeren Perturbationen aufgrund der

¹⁰Die Erzeugung von vielen dünnen Kanälen kostet viel Energie, wobei die Erzeugung von einigen dickeren Kanälen, die zum gleichen Schmelzdurchsatz führen, energetisch günstiger ist.

Viskositätsunterschiede zwischen der Matrix und der Schmelze die Oberflächenenergie an deren Grenzfläche erheblich ist und zu dem besagten Abfall der Wachstumsrate führen sollte.

Lediglich Hall und Parmentier (2000) konnten unter Berücksichtigung von Wasser einen Abfall der Wachstumsrate bei Wellenzahlen $k \geq \varsigma$ erfolgreich in die Theorie implementieren:

Die Viskositätsunterschiede, die den Hauptbeitrag zu dem sich ausbildenden Druckgradienten liefern, können durch eine Diffusion von vorwiegend in der Schmelze gelöstem Wasser (Partitionskoeffizient $D = 0.01$) zurück in die schmelzarmen Regionen reduziert werden. Diese Diffusion läuft bei Wellenzahlen $k \geq \varsigma$ schneller ab als bei entsprechend kleinen Wellenzahlen, folglich werden die Viskositätsunterschiede bei großen Wellenzahlen schneller ausgeglichen, wodurch sich eine maximale Wachstumsrate bei einer spezifischen Wellenzahl ausbildet.

Hall und Parmentier (2000) geben die Wellenzahl der maximalen Verstärkung mit $k_{hall} \approx (\varphi \kappa_{H_2O} \delta_c^2 / \Upsilon)^{-1/4} \text{ an}^{11}$. Die Berücksichtigung von Wasser führt zwar zu einer ausgezeichneten Wellenzahl k_{hall} , bei der die Wachstumsrate maximal ist, allerdings schwächt Wasser im Gegensatz zum trockenen Regime die Wachstumsrate ab. Auf diesen abschwächenden Effekt von Wasser wird in Kapitel 4.2 ausführlicher eingegangen.

Holtzman *et al.* (2003) versuchten die Theorie von Stevenson (1989) durch Experimente unter der Bedingung Einfacher Scherung an synthetischem Olivin+MORB¹² zu bestätigen. Jedoch zeigen ihre Experimente, dass sich die Kanäle nicht parallel zur maximalen Kompressionsspannung ausrichten, sie verlaufen vielmehr $\approx 20^\circ$ zur Scherebene geneigt. Allerdings weisen sie darauf hin, dass ihre Versuche aufgrund von unterschiedlichen physikalischen Grundvoraussetzungen nicht durch die oben beschriebene Theorie erklärt werden können. So nehmen sie an, dass ihre Experimente eher durch eine Kompaktionstheorie, welche auf einem „damage mechanism“ (Bercovici *et al.*, 2001) beruht, zu erklären sind.

¹¹ φ Porosität, κ_{H_2O} Diffusionskoeffizient für Wasser, δ_c Kompaktionslänge, Υ Aufschmelzrate

¹²MORB: Mittelozeanischer Rückenbasalt, „mid-ocean ridge basalt“

Eine ihrer weiteren Erklärungen für diese niedrigen Winkel ist, dass sich eine Superpositionierung zwischen dem bevorzugten Kanalisierungsinstabilitätswinkel von 45° und einem horizontal verlaufenden „shear partitioning“¹³ einstellt, dieses aber in der Theorie von Stevenson nicht berücksichtigt wird.

Spiegelman (2003) unterzog die Kanalisierungsinstabilität einer erneuten analytischen Untersuchung. Seine Analyse ergab, dass sich bei großen Dehnungen lediglich Kanäle, die einen initialen Auslenkwinkel von $\approx 20^\circ$ zur Scherebene aufweisen, maximal verstärken. Diese Kanäle werden während der Scherung zusehends in die optimale Lage (parallel zur MKS, gleich 45°) gedreht und können dementsprechend fortlaufend anwachsen, während sich z.B. Kanäle, die bei 45° anfangen, zwar anfänglich am stärksten verstärken, aber aus dieser Lage herausgedreht werden und eine immer schwächer werdende Wachstumsrate aufweisen. Der Grund hierfür ist die starke Nichtlinearität der Kanalisierungsinstabilität (Kap. 3).

Der Kanalbildung aufgrund chemischer Bedingungen gegenüber ist die spannungsangetriebene Schmelzsegregation (Kanalisierungsinstabilität) nur vom Spannungsfeld abhängig, und demzufolge findet eine Kanalisierung auch dann statt, wenn sich Schmelze und Matrix im chemischen Gleichgewicht befinden.

Die weitere Erforschung des Bildungsprozesses solcher Systeme (Segregation/Kanalisierung von Schmelze), des Aufstiegs der Schmelze innerhalb dieser Systeme (Perkolation von Schmelze), der Fokussierung der Kanäle zum Austrittsgebiet und des Verhaltens dieser Systeme bei großen Dehnungen stellt den Hauptbestandteil dieser Arbeit dar. Weiterhin soll untersucht werden, ob sich Kanäle großräumig zum Austrittsgebiet fokussieren.

¹³Die Scherdehnung der Matrix konzentriert sich in bänderartigen Regionen, so dass die Scherung fast ausschließlich in diesen Regionen abläuft, während die Regionen zwischen diesen Bändern fast völlig frei von Scherung sind

1.4 Die Rolle von Wasser im Mantel

1.4.1 Herkunft und Speicherstätten von Wasser im Mantel

Aus einer Abschätzung von Ringwood (1975) geht hervor, dass, wenn sich die Erde aus C1 Chondriten und Enstatit Chondriten gebildet hat, anfänglich 2 Gew.% Wasser vorhanden sein sollten. Einen Großteil dieses Wassers hat die Erde im weiteren Entstehungsprozess verloren. Augenscheinlich sind von den anfänglichen 2 Gew.% Wasser lediglich noch 0.02 Gew.% Wasser (in den Ozeanen) vorhanden, doch Abschätzungen von Ringwood (1975) und Ahrens (1989) zufolge müssen sich immer noch mehrere Ozeanmassen an Wasser gelöst im Mantel befinden.

Diese, vermutlich seit der Entstehung der Erde, im Mantel befindlichen Wassermassen werden bis dato weiterhin aufgefüllt. So zeigen die Untersuchungen von Peacock (1990), dass subduzierende Platten sechsmal so viel Wasser ($8.7 \cdot 10^{11} \text{ kg a}^{-1}$) in den Mantel befördern, als der Inselvulkanismus wieder an die Erdoberfläche fördert ($1.4 \cdot 10^{11} \text{ kg a}^{-1}$).

1.4.2 Verteilung des Wassers im Mantel

Die Gesamtmenge an gelöstem Wasser und vor allem dessen Verteilung spielen eine wichtige Rolle, da Wasser einen erheblichen Einfluss auf die meisten geophysikalischen Größen nimmt (Thompson, 1992). Hochdruckexperimente zeigen, dass die maximale Wasserlöslichkeit von Mantelgestein in der Übergangszone in der Größenordnung von 1 – 3 Gew.% und die des unteren und oberen Mantels in der Größenordnung von 0.1 – 0.2 Gew.% liegt (Bolfan-Casanova *et al.*, 2000; Murakami *et al.*, 2002).

Nach Bercovici und Karato (2003) zeigen geochemische Analysen von MORB (Wassergehalt: 0.01 Gew.%), die vorwiegend den oberen Mantel repräsentieren¹⁴ und OIB¹⁵ (Wassergehalt: 0.05 Gew.%), die im Gegensatz dazu den unteren Mantel repräsentieren¹⁶, eben-

¹⁴d.h. sie sind verarmt an inkompatiblen Elementen wie Uran und Thorium

¹⁵OIB: „ocean-island basalt“

¹⁶d.h. sie sind relativ angereichert mit diesen Elementen

falls dass diese beiden Mantelbereiche einen sehr geringen Wassergehalt aufweisen. Demzufolge kann davon ausgegangen werden, dass der obere wie auch der untere Mantel verhältnismäßig trocken sind, während die Übergangszone als das Hauptreservoir für die Wassermassen dient (Bercovici und Karato). Bercovici und Karato nehmen aufgrund dessen an, dass in der Übergangszone 0.2 – 2.0 Gew.% an Wasser gelöst sind. Ein weiteres Reservoir leicht erhöhten Wassergehalts in der Größenordnung von 0.1 Gew.% können Subduktionszonen sein (Sobolev und Chaussidon, 1995).

Geochemische Untersuchungen von Sobolev und Chaussidon (1995) an verarmten MORBs, die unter Fractional Melting entstanden sind, zeigen, dass die Quellregionen dieser Basalte 0.07 – 0.16 Gew.% ($\approx 1280 - 5280$ ppm H/Si) enthalten. Spätere Studien von Hirth und Kohlstedt (1996), ebenfalls an MORB, zeigen, dass der Olivin in ihren analysierten Basalten $\approx 50 \pm 30$ Gew. ppm ($\approx 810 \pm 490$ ppm H/Si) enthält.

1.4.3 Einfluss von Wasser auf die Rheologie und die Kanalisierungsinstabilität

In der aktuellen geophysikalischen Forschung wird immer häufiger der Einfluss von im Mantel gelöstem Wasser auf die unterschiedlichsten geophysikalisch relevanten Größen berücksichtigt (Hirth und Kohlstedt, 1996; Hall und Parmentier, 2000; Bercovici und Karato, 2003; Hofmann, 2003). Zwei der wichtigsten Einflüsse sind die Erniedrigung der Viskosität mit zunehmendem Wassergehalt und die Absenkung der Solidustemperatur, wodurch sich vor allem die partiell geschmolzenen Gebiete vergrößern.

Hierdurch werden andere geophysikalische Parameter, wie die seismische Geschwindigkeit und die elektrische Leitfähigkeit, ebenfalls erheblich beeinflusst.

In dieser Arbeit wird der Einfluss des Wassers auf die Viskosität, wie sie von Hall und Parmentier (2000) vorgeschlagen wird, berücksichtigt. So nehmen Hall und Parmentier (2000) an, dass der Wassergehalt c_s die intrinsische Matrixviskosität η_0 um $\log(c_s/\text{ppm}) - 1$ Größenordnungen erniedrigt. Eine vergleichbare Erniedrigung geben auch Hirth und Kohlstedt (1996) an. Ihrer Meinung nach verursacht ein Wassergehalt von $\approx 810 \pm 490$ ppm H/Si

in den Quellgebieten von MORB, dass die Viskosität in diesen Gebieten 500 ± 300 mal geringer ist, als in vergleichbaren, trockenen Bereichen.

Die in Kapitel 1.3.2 erwähnte Berücksichtigung von Wasser bei der Kanalisierungsinstabilität nach Hall und Parmentier hat zwar zur Folge, dass sich nur eine bevorzugte Wellenzahl verstärkt, gleichfalls aber die Wachstumsrate auch abschwächt.

Auf diesen Effekt wird in Kapitel 4.2 näher eingegangen.

Die vorliegende Arbeit stellt eine Weiterführung der Untersuchung der spannungsangetriebenen Schmelzsegregation (Stevenson, 1989), der Kanalisierungsinstabilität, mit Hilfe der numerischen Modellierung dar (Kap. 1.3.2). Das Hauptaugenmerk liegt dabei auf der Analyse der physikalischen Vorgänge unter endlicher Dehnung bei trockenen und nassen Bedingungen.

1.5 Numerik

Zur Untersuchung wird der von Schmeling (2000) entwickelte 2D Finite-Differenzen Code FDCON verwendet. Dieser Code wurde für die Simulation vertikal spiegelsymmetrischer, großskaliger fluid-dynamischer Prozesse entworfen. Damit können Probleme unter Reiner Scherung sowie Plumeaufstiege, die eine Interaktion mit einer Spreizungszone aufweisen können, oder Mantelkonvektionsprobleme gelöst werden. Der Code ist konzipiert, das Fließverhalten eines Zwei-Phasen-Systems, welches aus einer hochviskosen Phase, der Matrix, und einer niederviskosen Phase, der Schmelze, besteht, durch die Lösung der von McKenzie (1984) aufgestellten Erhaltungsgleichungen für die Masse (Glg. 2.2 und 2.3), den Impuls (Glg. 2.4 und 2.5) und die Energie (Schmeling (2000), Glg. 9) zu bestimmen. Zur Lösung der zeitabhängigen Gleichungen wird ein Voll-Implizites-Differenzenschema in Verbindung mit einer ADI-Methode¹⁷ verwendet; die Advektion wird durch ein „Upwind“-Verfahren durchgeführt.

¹⁷ „alternating-direction implicit method“

Da die Aufgabenstellung dieser Arbeit auf einem mesoskaligen Problem aufbaut, stellte sich die Frage, ob FDCON für die Lösung dieses Problems geeignet ist. Es zeigte sich, dass FDCON nur dann in der Lage ist, das Problem erfolgreich zu lösen, wenn seine Genauigkeit um mindestens eine Größenordnung erhöht wird.

Diese Erhöhung wurde vor allem durch die Implementierung eines Upwind-Verfahrens zweiter Fehlerordnung erreicht (Kap. 5.1). Diese Erweiterung sowie weitere Veränderungen, wie die Implementierung von periodischen Randbedingungen (Kap. 2.5.1), um Einfache Scherung simulieren zu können, oder die Erweiterung von FDCON um die Erhaltungsgleichungen von Wasser (Glg. 4.1) wird ausführlich in Kapitel 4 und 5 beschrieben.

1.6 Zusammenfassung der Fragestellung

Mit Hilfe der numerischen Modellierung gilt es zu untersuchen, ob eine rein mechanische Deformierung einer schmelzgefüllten Matrix zu einer Bildung von Kanälen führt, wie sich die Kanäle in einem gegebenen Spannungsfeld organisieren und welche Rolle hierbei die initiale Schmelzverteilung bzw. -geometrie, die Dehnungsrate sowie der Auftrieb der Schmelze spielen.

Für die Modellierung wird der von Schmeling (2000) entwickelte Finite-Differenzen Code FDCON verwendet. Zum einen soll geprüft werden, ob mit diesem Code mesoskalige fluiddynamische Prozesse modelliert werden können. Zum anderen ist FDCON dahingehend weiterzuentwickeln, dass, zusätzlich zu der schon bestehenden Möglichkeit der Reinen Scherung, auch die Möglichkeit besteht, Prozesse unter Einfacher Scherung zu simulieren.

Für die Analyse des Segregationsverhaltens der Schmelze unter wasserhaltigen Bedingungen besteht außerdem die Aufgabe, die von Hall und Parmentier (2000) aufgestellte, vollständige Erhaltungsgleichung für Wasser in FDCON zu implementieren und auszuwerten. Nach ihrer erfolgreichen Implementierung soll geklärt werden, welchen Einfluss Wasser auf das Gesamtsystem hat. Diese Vorstudien sollen abschließend zur Klärung der Frage

beitragen, wie es der Schmelze möglich ist, aus einem breiten Schmelzbereich (z. B. Plume kopf mit einer Ausdehnung von mehreren 100 km) an einem mittelozeanischen Rücken (Ausdehnung einige 10 km) fokussiert auszutreten.

Diese Arbeit ist in eine physikalische Einführung des Problems, eine anschließende Darstellung der Entwicklungsarbeit an FDCON und die Darstellung, Auswertung und Diskussion der Ergebnisse gegliedert.

Im Anhang sind die wichtigsten mathematischen Methoden zur Analyse der vorliegenden physikalischen Probleme aufgezeigt.

Der Prozess der Schmelzakkumulation und Schmelzextraktion aus den eingangs erwähnten Quellgebieten des Erdmantels lässt sich vereinfacht durch ein Zweiphasenmodell beschreiben. Die erste Phase ist eine hochviskose deformierbare Matrix, in der die zweite Phase, die niederviskose Schmelze, eingebettet liegt. Die elementaren Gleichungen für solch ein Zweiphasensystem wurden von McKenzie (1984) aufgestellt. Die drei wichtigsten Gleichungen sind die Erhaltungsgleichungen für die Masse und den Impuls für jeweils eine Phase, sowie die Energieerhaltungsgleichung. Hierdurch entsteht im 2D Fall ein gekoppeltes Gleichungssystem, bestehend aus sechs¹ Erhaltungsgleichungen.

2.1 Isothermie

Werden thermisch ausgeglichene Quellgebiete sowie geologisch kurze² Zeiträume betrachtet, kann angenommen werden, dass die physikalischen Vorgänge isotherm ablaufen. Werden hierzu die zwei Diffusionszeiten

$$t_{H_2O} = \frac{L^2}{\kappa_{H_2O}} \quad (2.1a)$$

$$t_{therm.} = \frac{L^2}{\kappa} \quad (2.1b)$$

und die zwei charakteristischen Zeiten

$$t_{darcy} = \frac{L}{u_{fluid}} \quad (2.1c)$$

$$t_{mech.} = \frac{L}{u_{matrix}} \quad (2.1d)$$

L Diffusionslänge, u_{matrix} maximale Matrixgeschwindigkeit, κ thermischer Diffusionskoeffizient, u_{fluid} Darcy-Geschwindigkeit der Schmelze, κ_{H_2O} Diffusionskoeffizient für Wasser

¹Massenerhaltung zwei Glg., Impulserhaltung drei Glg. und Energieerhaltung eine Glg.

²d.h. die thermischen Randbedingungen des Untersuchungsgebietes ändern sich nicht

betrachtet, die jeweils Aufschluss darüber geben, wie schnell ein System auf eine entsprechende Störung der Advektionsgeschwindigkeit, der Temperatur, der Darcy Strömung und der Wasserkonzentration reagieren kann, so ist eine Abschätzung möglich, ob eine isotherme Betrachtung der hier ablaufenden Prozesse gerechtfertigt ist. Sollte dies, zutreffen kann die Erhaltungsgleichung für die Energie vernachlässigt werden. Das gekoppelte Gleichungssystem würde sich somit auf fünf gekoppelte Gleichungen vereinfachen.

In Abbildung 2.1 ist deutlich zu erkennen, dass sowohl die Diffusionszeit $t_{mech.}$ ab einer Diffusionslänge von $L_{mech_0} \approx 20$ m als auch t_{darcy} für die gesamte dargestellte Diffusionslänge unterhalb der thermischen Diffusionszeit $t_{therm.}$ und diese unterhalb der für Wasser liegt. Hieraus ergibt sich, dass, solange Strukturen, die größer als 20 m sind, untersucht werden, eine isotherme Betrachtung der ablaufenden Prozesse legitim ist.

Nachfolgend werden die fünf Erhaltungsgleichungen sowie weitere wichtige physikalische Zusammenhänge vorgestellt und beschrieben. Die Berücksichtigung der Energieerhaltungsgleichung und eine weiterführende Beschreibung FDCONs sind in Schmeling (2000) zu finden. Alle physikalischen Angaben beziehen sich auf das SI-Einheitensystem. Eine Auflistung aller verwendeten Bezeichnungen, einschließlich des hier verwendeten Parameterbereiches, ist im Anhang A in Tabelle A.1 zu finden.

2.2 Erhaltungsgleichungen

2.2.1 Erhaltungsgleichungen für die Masse

Massenerhaltung der Schmelze

Die Gleichung für die Massenerhaltung der Schmelze lautet

$$\frac{\partial \rho_f \varphi}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho_f \varphi \vec{u}_f) = \frac{DM}{Dt} \stackrel{isotherm}{=} 0. \quad (2.2)$$

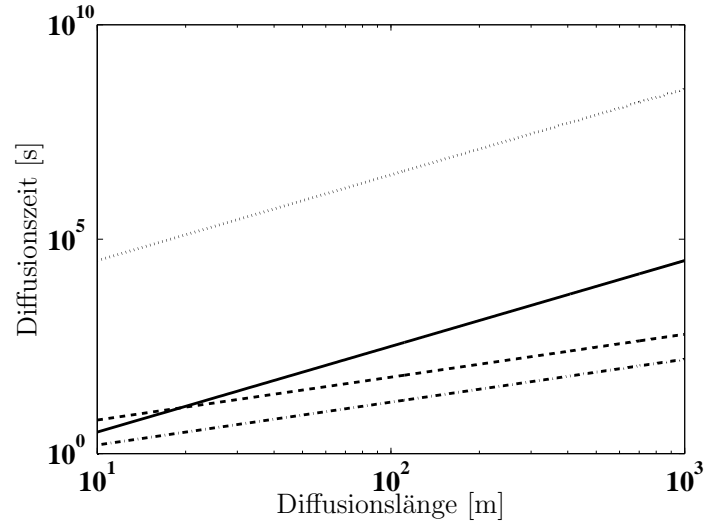


Abbildung 2.1. Thermisch, mechanische, Darcy und H_2O Diffusionszeit in Abhängigkeit der Diffusionslänge.

— therm. Diffusionszeit $t_{therm.}$ -.- Darcy Diffusionszeit t_{darcy}
 - - mech. Diffusionszeit $t_{mech.}$ H_2O Diffusionszeit t_{H_2O}

Parameter der Berechnung der Diffusionszeiten nach den Gleichungen 2.1a-d:

$t_{mech.}: u_{matrix} = u_{max} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ m s}^{-1}$

$t_{therm.}: \kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$t_{H_2O}: \kappa_{H_2O} = 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$

$t_{darcy}: u_{fluid} = 6 \cdot 10^{-9} \text{ m s}^{-1}$

nach Glg. 2.4 mit

$\eta_f = 0.77 \text{ Pa s}$, $\varphi = 3.0 \text{ [\%]}$,

$\rho = 2900 \text{ kg m}^{-3}$ $k_\varphi = 4 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2$,

$g = 10.0 \text{ m s}^{-2}$

Die Referenzen zu diesen Werten sind im Anhang A.2 zu finden.

ρ Dichte, φ Porosität/Schmelzanteil, t Zeit, \vec{u} Geschwindigkeit, DM/Dt Schmelzproduktionsrate eines Volumenelementes der Matrix mit $D/Dt = \partial/\partial t + \vec{u}_s \cdot \vec{\nabla}$. Die Indizes f und s stehen für Schmelze (fluid) und Matrix (solid).

Massenerhaltung der Matrix

Die Gleichung für die Massenerhaltung der Matrix ist

$$\frac{\partial \rho_s (1 - \varphi)}{\partial t} + \vec{\nabla} (\rho_s (1 - \varphi) \vec{u}_s) = - \frac{DM}{Dt} \stackrel{isotherm}{=} 0. \quad (2.3)$$

Gleichungen 2.2 und 2.3 legen dar, wie sich eine Komponente (Schmelze bzw. Matrix) innerhalb einer beliebigen Kontrollfläche aufgrund eines Ein- oder Ausflusses durch dessen Umrandung verändert. Des Weiteren berücksichtigen sie im thermalen Fall ($DM/Dt \neq 0$) die Porositätsänderung aufgrund von Schmelzgeneration bzw. Kristallisation.

2.2.2 Gleichungen für die Impulserhaltung

Impulserhaltung der Schmelze

Die Gleichung für die Impulserhaltung der Schmelze ist

$$\vec{u}_f - \vec{u}_s = -\frac{k_\varphi}{\eta_f \varphi} \left(\vec{\nabla} P + \rho_f g \delta_{i2} \right). \quad (2.4)$$

k_φ Permeabilität, η_f Schmelzviskosität, P Druck innerhalb der Schmelze, g Gravitationsbeschleunigung und δ_{i2} Einheitsvektor in z -Richtung

Gleichung 2.4 beschreibt die relative Strömungsgeschwindigkeit der Schmelze zur Matrix aufgrund eines Druckgradienten (erster Summand in der Klammer) und ihres Auftriebs (zweiter Summand in der Klammer). Der Ausdruck in der Klammer selbst repräsentiert den nicht-hydrostatischen Druck innerhalb der Schmelze. Liegt keine Matrixgeschwindigkeit vor ($\vec{u}_s = 0$), so vereinfacht sich Gleichung 2.4 zum bekannten Darcy Gesetz.

Impulserhaltung der Matrix

Die Gleichung für die Impulserhaltung der Matrix ist

$$-\bar{\rho} g \delta_{i2} - \vec{\nabla} P + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.5)$$

$\bar{\rho}$ gemittelte Dichte aus Matrix und Schmelze, τ_{ij} viskoser Spannungstensor, x_i Koordinate in die i -te Richtung

Der deviatorische³ viskose Spannungstensor ist gegeben durch

$$\tau_{ij} = \eta_s \left(\frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{sj}}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\eta_b - \frac{2}{3}\eta_s \right) \vec{\nabla} \vec{u}_s. \quad (2.6)$$

η_s effektive Scherviskosität, η_b effektive Volumenviskosität, \vec{u}_s Geschwindigkeit der Matrix, δ_{ij} Kronecker Delta

Gleichung 2.5 beschreibt, wie sich eine Änderung der viskosen Spannung auf den Druckgradienten auswirkt, und welchen Einfluss der Auftrieb des gesamten Körpers auf diese beiden Größen nimmt. Der Druck P ist in diesem Fall der Druck innerhalb der Matrix, der nicht durch eine viskose Kompaktion hervorgerufen wird; er ist mit dem Druck aus Gleichung 2.4 nur dann identisch, wenn keine Oberflächenspannungen zwischen der Schmelze und der Matrix auftreten.

Das Medium, welches die Matrix bildet, wird als inkompressibel angesehen, allerdings kann die Matrix, da sie porös ist, sehr wohl kompaktieren oder sich ausdehnen. Dieses Verhalten wird durch den η_b Term in Gleichung 2.6 berücksichtigt. In FDCON sind sowohl η_b als auch η_s porositätsabhängig und werden in Kapitel 2.6 näher betrachtet.

2.2.3 Die Stromfunktion

Im Zweidimensionalen kann der Geschwindigkeitsvektor $\vec{u} = (u_x, u_z)$ durch eine skalare Funktion ersetzt werden, die Stromfunktion ψ (Turcotte and Schubert, 2002). Die Stromfunktion ψ sei so gewählt, dass

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{und} \quad u_z = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.7)$$

gilt. Im zweidimensionalen und inkompressiblen Fall ($\rho_f = \text{konst.}, \rho_s = \text{konst.} \rightarrow \vec{\nabla} \vec{u} = 0$) resultiert das Einsetzen des Spannungstensors 2.6 mit variabler Scher- und Volumenviskosität in die Impulserhaltung der Matrix (Glg. 2.5) unter Berücksichtigung der Strom-

³um den Druck reduzierter Spannungstensor; $\tau_{ij} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij} = \sigma_{ij} - 1/3\sigma_{ii}$

funktion (Glg. 2.7) in einer Differenzialgleichung 4. Ordnung mit nur einer Variablen, der biharmonischen Differenzialgleichung

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\eta_s \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right) + 4\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}. \quad (2.8)$$

Die Forderung der Inkompressibilität steht allerdings im Widerspruch, Konvektionsprobleme zu simulieren, da diese auf der Existenz von Dichteveriationen beruhen. Mit Hilfe der Boussinesq Approximation bzw. der Compaction Boussinesq Approximation können sowohl die Forderung der Inkompressibilität wie auch die der Dichteveriation erfüllt werden. (Kap. 2.3).

2.3 Die Compaction Boussinesq Approximation

Die Benutzung der Stromfunktion ψ fordert Inkompressibilität. Um diese zu gewährleisten, muss die Dichte in den Massenerhaltungsgleichungen (Kapitel 2.2) als konstant angenommen werden (Turcotte and Schubert, 2002, Kap. 6). Konstante Dichte steht allerdings im Widerspruch zur Konvektion, die nur dann auftritt, wenn Dichteunterschiede vorhanden sind. Beide Forderungen können durch die vielfach in Mantelkonvektionsproblemen benutzte Boussinesq Approximation (BA, Boussinesq (1903)) erfüllt werden. In der BA werden Variationen der Dichte, insofern sie nicht mit gravitativen Größen verknüpft sind, vernachlässigt, um die Inkompressibilität der Matrix in den Erhaltungsgleichungen zu gewährleisten.

Speziell die Annahme der Matrixinkompressibilität in der Impulserhaltungsgleichung für die Schmelze hat zur Folge, dass die durch Kompaktion der Matrix angetriebene signifikante Segregation der Schmelze unterbunden wird. Um diese Segregation der Schmelze dennoch zu berücksichtigen, hat Schmeling (2000) die BA zur Compaction Boussinesq Approximation (CBA) erweitert, indem auf die Matrixinkompressibilität in der Schmelzimpulserhaltungsgleichung verzichtet wurde. Dies bedeutet, dass sowohl Dichteveriationen

sowie Kompaktion der Matrix in Gleichung 2.4 berücksichtigt werden, um die Segregation der Schmelze anzutreiben. Die Impulserhaltungsgleichung der Matrix (Glg. 2.5) hingegen wird wie in der BA behandelt: Die Matrix ist inkompressibel und Dichtevariationen werden nur im Auftriebsterm berücksichtigt.

Diese Approximation ist gerechtfertigt, solange nur kleine Schmelzanteile ($\varphi < 20\%$) in den Berechnungen auftreten (Schmeling, 2000). In Kapitel 6.2 wird aufgezeigt, welche zusätzlichen Randbedingungen bei der Verwendung der CBA zu berücksichtigen sind.

2.4 Spannungs-Dehnungsraten-Beziehung

Werden viskose Körper einer anhaltenden Spannung ausgesetzt, führt dies - im Gegensatz zu elastischen Körpern - zu einer fortschreitenden Dehnung. Demzufolge ist es sinnvoll, diesem Prozess nicht die Dehnung ε , sondern die Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}$ zugrunde zu legen

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{sj}}{\partial x_i} \right). \quad (2.9)$$

$\dot{\varepsilon}$ Dehnungsratentensor, u_{si} Geschwindigkeit der Matrix

Hieraus folgt für den Zusammenhang zwischen dem deviatorischen viskosen Spannungstensor τ_{ij} und der Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{ij}$ für inkompressible Medien

$$\tau_{ij} = 2\eta_s \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (2.10)$$

und für kompressible Medien die in Gleichung 2.6 eingeführte Beziehung

$$\tau_{ij} = \eta_s \left(\frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{sj}}{\partial x_i} \right) + \delta_{ij} \left(\eta_b - \frac{2}{3}\eta_s \right) \vec{\nabla} \cdot \vec{u}_s. \quad (2.11)$$

Für die beiden Spezialfälle Reine Scherung (RS) und Einfache Scherung (ES) kann die Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}$ direkt aus der Kantenlänge einer quadratisch angenommenen betroffenen Region und der dort herrschenden maximalen Geschwindigkeit bestimmt werden.

$$\dot{\epsilon}_{ij_{RS}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_{sx}}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_{sz}}{\partial z} = -\frac{\partial u_{sx}}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{u_{max}}{h_x} & 0 \\ 0 & -\frac{u_{max}}{h_x} \end{pmatrix} \quad (2.12)$$

$$\dot{\epsilon}_{ij_{ES}} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial u_{sx}}{\partial z} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial u_{sz}}{\partial x} = -\frac{1}{2} \frac{\partial u_{sx}}{\partial z} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{u_{max}}{h_z} \\ -\frac{1}{2} \frac{u_{max}}{h_z} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

u_{sx}, u_{sz} Matrixgeschwindigkeit in x, z -Richtung, u_{max} Maximalgeschwindigkeit,

$h_x = h_z$ Kantenlänge der Region

2.4.1 Ausrichtung der maximalen Kompressionsspannung

Die Ausrichtung ξ der maximalen Kompressionsspannung τ_{max} ist im Rahmen der Analyse der Kanalisierungsinstabilität eine wichtige Größe, da sich die bildenden Kanäle parallel zu ihr ausrichten. Die Ausrichtung ξ kann im Zweidimensionalen leicht aus dem allg. Spannungstensor berechnet werden, wenn dessen Eigenwerte $\lambda_{1,2}$ bekannt sind. Die Eigenwerte eines 2D-Tensors sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \lambda_{1/2} &= -\frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2}\right)^2 - (\tau_{11}\tau_{22} - \tau_{12}^2)} \\ &= -\frac{\tau_{11} + \tau_{22}}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}(\tau_{11} - \tau_{22})^2 + \tau_{12}^2}. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die Ausrichtung der maximalen Kompressionsspannung ξ kann dann mit $\lambda^* = \min(\lambda_1, \lambda_2)$ aus folgender Relation bestimmt werden

$$\xi = \arctan\left(-\frac{\tau_{11} - \lambda^*}{\tau_{12}}\right). \quad (2.15)$$

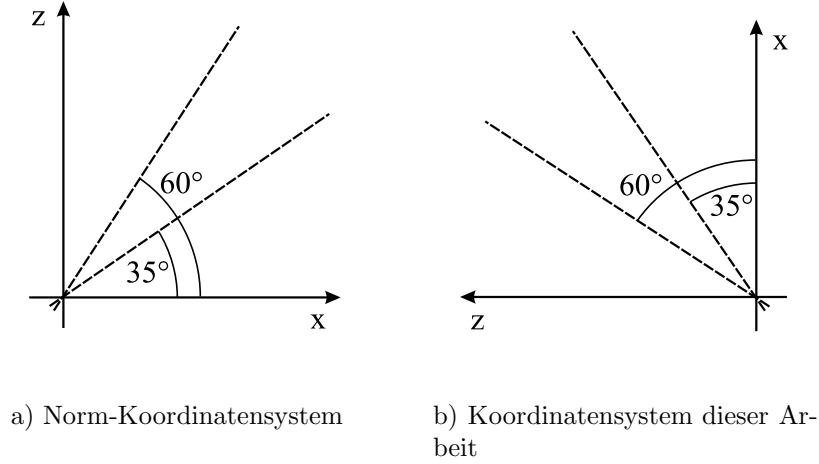


Abbildung 2.2. Vergleich des hier verwendeten Koordinatensystems mit einem üblichen Koordinatensystem

Gleichung 2.15 wird in dieser Arbeit bei großskaligen Mantelkonvektionssimulationen für Gebiete der Größe von ca. 1×2 km zur Bestimmung der bevorzugten Ausrichtung der Kanäle angewendet, da die Auflösung von FDCON nicht hinreichend fein ist (Kap. 6.11).

Der Winkel ξ ist in einem üblichen rechtsdrehenden Koordinatensystem zu verstehen. Um ξ auf die in dieser Arbeit verwendete Winkelnotation⁴ (Abb. 2.2) zu transformieren, gilt

$$\xi' = \begin{cases} \xi - 90^\circ & \text{falls } \xi > 0 \\ \xi + 90^\circ & \text{falls } \xi \leq 0. \end{cases} \quad (2.16)$$

Diese ungewöhnliche Winkelnotation liegt in der Natur der in Kapitel 3 beschriebenen Kanalisierungsinstabilität:

Das Anwachsen der Porosität in den Kanälen, ausgedrückt durch die Wachstumsrate, folgt in Abhängigkeit des Auslenkwinkels einem Sinus. Im Falle Einfacher Scherung weist dieser Sinus ein Maximum bei 135° und ein Minimum bei 45° zur Scherebene auf. Durch die hier

⁴positive x -Achse nach oben, positive z -Achse nach links, 0° Vertikale, linksdrehend zunehmende Winkel

angewendete Winkelnotation werden diese beiden Winkel auf 45° (Maximalwert) und -45° (Minimalwert) transformiert, wodurch eine Punktsymmetrie erreicht wird.

2.5 Einfache Scherung und Reine Scherung

FDCON ist in seiner Grundversion nur in der Lage, Reine Scherung zu simulieren. Im Laufe dieser Arbeit zeigte sich allerdings, dass der Deformationszustand Einfache Scherung mehr Möglichkeiten zur Analyse der Kanalisierungsinstabilität bietet. Dementsprechend wurde im Rahmen dieser Untersuchung FDCON um die Möglichkeit der Simulation Einfacher Scherung erweitert.

Streng genommen gilt die analytische Lösung der Kanalisierungsinstabilität nur für den Fall Reiner Scherung. Da allerdings viskose Medien untersucht werden, bei denen sich die beiden Deformationszustände Einfache und Reine Scherung im Verschiebungsfeld nur um eine Rotation unterscheiden, kann jeweils der der Analyse zuträglichste Deformationszustand gewählt und simuliert werden.

Aus Symmetriegründen⁵ wird im Falle von FDCON bei der Simulation von Reiner Scherung nur ein Viertel des Verschiebungsfeldes berechnet (Abb. 2.4, S. 32). Bedingt durch diese Art der Simulation von Reiner Scherung (hier konstanter Einfluss an der Unterseite der Box und konstanter Ausfluss am rechten Rand), wird das der Analyse zur Verfügung stehende Rechengebiet mit zunehmender Dehnung jedoch kleiner, da für diesen Fall keine periodischen Randbedingungen für den oberen und unteren Rand in FDCON implementiert sind. Demzufolge ist eine Auswertung der erzeugten Felder ab einer Dehnung von ca. $\varepsilon_{RS} \approx 0.5$ nicht mehr zu vertreten.

Generell ist eine Analyse der Kanalisierungsinstabilität unter den Bedingungen der linearen Stabilitätsanalyse vorzuziehen, dies birgt jedoch den Nachteil des bei zunehmenden Dehnungen zu klein werdenden Rechengebietes. Ein wichtiger Punkt dieser Arbeit ist es jedoch,

⁵Das Verschiebungsfeld bei Reiner Scherung besitzt zwei Symmetrieebenen, eine horizontale und eine vertikale.

das Verhalten von Kanälen bei großen Dehnungen ($\varepsilon_{xz} > 1$) zu untersuchen. Bedingt durch die Möglichkeit, bei Einfacher Scherung periodische Randbedingungen für den linken und rechten Rand zu benutzen, wodurch beliebige Dehnungen realisiert werden können, und der Tatsache, dass sich Einfache und Reine Scherung im viskosen Fall nur durch eine Rotation unterscheiden, ist Einfache Scherung der Reinen Scherung vorzuziehen.

2.5.1 Implementierung und Simulation Einfacher Scherung

Das Geschwindigkeitsfeld der Einfachen Scherung ist durch eine linear ansteigende Geschwindigkeit parallel zur Scherebene gekennzeichnet. Demnach muss Material an den senkrecht zu dieser Ebene stehenden Rändern herein- bzw. hinausfließen können. Die Grundversion FDCONs weist nur die Möglichkeit des Ein- bzw. Ausflusses am rechten und den horizontal verlaufenden Rändern der Modellbox auf. Prinzipiell kann damit Einfache Scherung in vertikaler Richtung simuliert werden, d.h. nur parallel zum Schwerfeld der Erde, was jedoch nicht Gegenstand dieser Untersuchung ist. Aus diesem Grund wurde FDCON dahingehend erweitert, dass ein Ein- bzw. Ausfluss auch am linken Rand erfolgen kann und somit eine Simulation von Einfacher Scherung senkrecht zum Schwerfeld der Erde ermöglicht wird.

Winkler-Arndt (1998) hat in ihrer Diplomarbeit dargelegt, wie FDCON zu verändern ist, um einen Ein- bzw. Ausfluss am oberen Rand der Modellbox unter der Randbedingung „No Slip“ zu ermöglichen. Ihre Aussagen bzgl. des oberen Randes wurden auf den linken Rand transformiert und in FDCON implementiert.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde vorwiegend Einfache Scherung simuliert, die eine horizontal verlaufende Scherebene aufweist. Die senkrecht zu dieser stehenden Ränder werden im folgenden als „linker“ bzw. „rechter“ Rand und die parallel zu dieser verlaufenden Ränder als „oberer“ bzw. „unterer“ Rand bezeichnet.

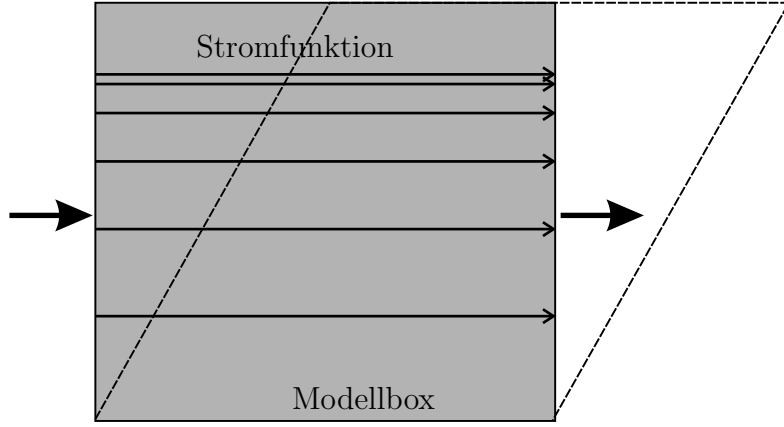


Abbildung 2.3. Skizze der Modellbox im Falle Einfacher Scherung

Die Simulation von Einfacher Scherung mit periodischen Randbedingungen ist mit FDCON durch die Vorgabe von kinematischen Randbedingungen an allen Rändern realisierbar, wobei im Falle von Einfacher Scherung (ohne Auftrieb) gilt

$$u_{n,o} = u_{n,u} = 0 \qquad u_{n,l} = u_{n,r} = u_0 \frac{z}{h} \qquad (2.17)$$

$$u_{t,o} = u_0 \qquad u_{t,u,l,r} = 0. \qquad (2.18)$$

u Geschwindigkeit, n, t Index für Normal-, Tangentialgeschwindigkeit, o, u, l, r Index für oben, unten, links und rechts

Diese Randbedingungen führen unter Verwendung von Gleichung 2.19 zu einer zur Scherebene quadratisch ansteigenden Stromfunktion. Diese wirkt sich nunmehr dahingehend aus, dass die Matrix wie in Abbildung 2.3 geschert wird.

Die Vorgabe von diesen Geschwindigkeiten ist in der Grundversion von FDCON nur am oberen, unteren und bedingt am rechten Rand gegeben. Die Implementierung dieser kinematischen Randbedingungen am linken und rechten Rand kann durch die Methode der aufgeprägten Stromfunktion (Enns, 2002) ohne große Veränderung an FDCON realisiert

werden. Das Verfahren ermöglicht es, an jedem beliebigen Gitterpunkt die Stromfunktionswerte ψ und damit die Geschwindigkeiten $u_x = \partial\psi/\partial z$ und $u_z = -\partial\psi/\partial x$ vorzugeben. Die Stromfunktion kann analytisch berechnet werden nach

$$\psi(x, z) = \psi(a, b) + \int_a^x u_z(x', b) dx' - \int_b^z u_x(x, z') dz'. \quad (2.19)$$

ψ Stromfunktion, a, b Integrationspunkte, u_x, u_z Geschwindigkeitsverteilung in x, z -Richtung, $\psi(a, b)$ konstanter Verschiebungswert der Stromfunktion

Aus numerischen Gründen müssen die nach Gleichung 2.19, unter Berücksichtigung der beiden Gleichungen 2.17, berechneten Stromfunktionswerte nicht nur an den jeweiligen Rändern aufgeprägt werden, sondern auch an den zwei nächsten jeweils in der Normalrichtung vom Rand entfernten Gitterpunkten⁶.

Dieses Verfahren der aufgeprägten Stromfunktion wird in jedem Zeitschritt angewendet, wodurch die Simulation von Einfacher Scherung mit FDCON ermöglicht wird.

Vergleiche des auf diese Weise durch FDCON berechneten kompletten Stromfunktionsfeldes mit dem der analytischen Lösung (Glg. 2.19) weisen keine Differenzen auf. Somit konnte gezeigt werden, dass FDCON durch diese Erweiterung in der Lage ist, Einfache Scherung im obigen Sinne zu simulieren.

2.5.2 Simulation Reiner Scherung

FDCON konnte bereits über Vorgabe entsprechender kinematischer Randbedingungen Reine Scherung (Glg. 2.20) simulieren

$$\begin{aligned} u_{n,o} = u_{n,l} &= 0 & -u_{n,u} = u_{n,r} &= u_0 = \text{konst.} \neq 0 \\ u_{t,o,u} &= \frac{u_0 x}{h} & u_{t,l,r} &= -\frac{u_0 z}{h} + u_0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

⁶d.h. bei einem Gitter, welches aus $(nx \times nz)$ Gitterpunkten besteht, an den (Rand)punkten $R_{x=1, nx, z=\{1..nz\}}$, $R_{x=2, nx-1, z=\{1..nz\}}$ und $R_{x=3, nx-2, z=\{1..nz\}}$

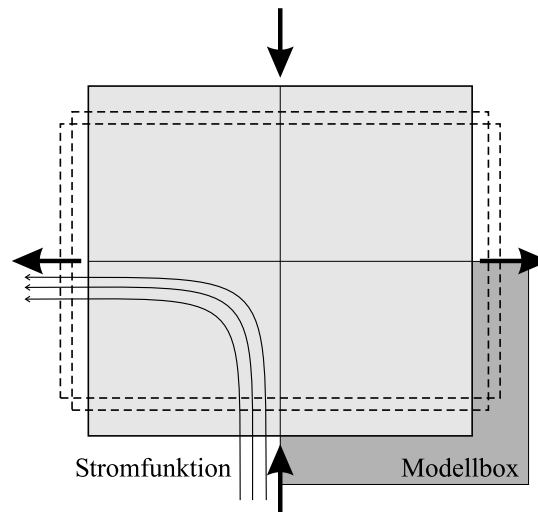


Abbildung 2.4. Skizze der Modellbox im Falle Reiner Scherung

u Geschwindigkeit, n, t Index für Normal-, Tangentialgeschwindigkeit, o, u, l, r Index für oben, unten, links und rechts

Das Verschiebungsfeld von Reiner Scherung besitzt zwei Symmetrieebenen. Aus diesem Grund wird bei der Simulation mit FDCON nur ein Viertel des Verschiebungsfeldes berechnet (Modellbox in Abb. 2.4).

2.5.3 Superpositionierung Einfacher und Reiner Scherung

Eine Superpositionierung von Einfacher und Reiner Scherung kann leicht realisiert werden, wenn die kinematischen Randbedingungen für diese (Glg. 2.17 und Glg. 2.20) addiert werden und mit Hilfe der Methode der aufgeprägten Stromfunktion FDCON unter Ausnutzung von Gleichung 2.19 aufgeprägt werden.

2.6 Viskositätsgesetze

Liegt dem zu analysierenden Prozess eine poröse Matrix zugrunde, so ist es physikalisch sinnvoll, in Gleichung 2.6 porositätsabhängige Viskositäten anstelle der intrinsischen Vis-

kosität zu verwenden. In FDCON sind sowohl die Scherviskosität η_s als auch die Volumenviskosität η_b eine Funktion der Porosität φ (Schmeling, 2000; Kohlstedt *et al.*, 2000) und ggf. des Wassergehaltes c_s (Hall und Parmentier, 2000).

2.6.1 Die effektive Scherviskosität η_s

Kohlstedt *et al.* (2000) geben für die Berechnung einer effektiven, porositätsabhängigen Scherviskosität η_s aus der porositätsunabhängigen intrinsischen Scherviskosität $\eta_m(T)$ folgendes Gesetz an

$$\eta_s(T, \varphi) = \eta_m(T) e^{-a_1 \varphi}. \quad (2.21)$$

a_1 Konstante in einem Bereich von 26 – 45, $\eta_m(T)$ temperaturabhängige intrinsische Scherviskosität der Matrix, φ Porosität.

In der Literatur variiert die Konstante a_1 in einem Bereich von 26 – 45. Kohlstedt *et al.* (2000) bestimmten a_1 durch Deformationsexperimente im Labor an trockenen und wasserhaltigen, synthetisch hergestellten Mantelgesteinen zu $a_1 = 28$. Dies korrigierte den von Kelemen *et al.* (1997) vorgeschlagenen Wert von $a_1 = 45$, der aus einer Anpassung der effektiven Viskosität bei Dislokations- und Kriechexperimenten resultiert, etwas nach unten. Neuere Laborexperimente an partiell geschmolzenen, wasserhaltigen Olivin-Basalt-Aggregaten ($2\% \leq \varphi \leq 12\%$) von Mei *et al.* (2002) liefern für Diffusionskriechen $a_1 \approx 26$ und für Dislokationskriechen $a_1 \approx 31$.

In dieser Arbeit wird der von Kohlstedt *et al.* (2000) bestimmte Wert von $a_1 = 28$ verwendet, da dieser sowohl für trockene, als auch wasserhaltige Medien gilt. Der Einfluss unterschiedlicher a_1 auf die Kanalisierungsinstabilität wird in Kapitel 6.2.1 untersucht.

2.6.2 Die effektive Volumenviskosität η_b

In vielen Segregationsmodellen wird der Volumenviskosität keine große Bedeutung zugeschrieben. Sie wird entweder völlig vernachlässigt, oder ihr wird einfachheitshalber der

Wert der effektiven Scherviskosität beigemessen (McKenzie, 1984). Mittlerweile sind einige Veröffentlichungen über die Bedeutung der Volumenviskosität bezüglich der Segregation erschienen, die zeigen, dass sie *nicht* vernachlässigt werden sollte (Sleep, 1988; Schmeling, 2000).

Es bietet sich an, mit Hilfe der numerischen Modellierung die diversen Annahmen über die Volumenviskosität im Rahmen dieser Arbeit zu testen. Die hier verwendete Namensgebung der Viskositätsmodelle beruht auf der jeweiligen Quelle der einzelnen Gesetze.

Modell McKenzie

In McKenzie (1984) wird die Volumenviskosität η_b mit der effektiven Scherviskosität η_s gleichgesetzt. Für FDCON würde dies bedeuten

$$\eta_{b_{mck}}(\varphi) = \eta_s(\varphi) \stackrel{FDCON}{=} \eta_m e^{-a_1 \varphi}. \quad (2.22)$$

a_1 Konstante in einem Bereich von 26 – 45, η_s effektive Scherviskosität, η_m intrinsische Scherviskosität der Matrix, φ Porosität.

Dieses Gesetz berücksichtigt Unterschiede, die zwischen Scher- und Volumenviskosität aufgrund der geometrischen Verteilung von Schmelzkanälen oder Körnern auftreten, nicht, führt aber, wenn die Porosität gegen Null strebt, zu einem endlichen Wert der Volumenviskosität. Im weiteren Vergleich mit den hier vorgestellten Rheologien und Parameterbereichen weist dieses Gesetz der Volumenviskosität die geringste Viskosität zu.

Dennoch zeigt sich, dass bei Verwendung dieser Gesetzmäßigkeit die Wachstumsrate der Kanalisierungsinstabilität am stärksten ist (Kapitel 3).

Modell Richardson

Richardson (1998) gibt für die Volumenviskosität η_b folgende Gleichung an

$$\eta_{b_{rich}}(\varphi) = \eta_m(\varphi_0/\varphi). \quad (2.23)$$

η_m intrinsische Scherviskosität der Matrix, φ_0 Hintergrundporosität, φ Porosität.

In diesem Gesetz wird der Volumenviskosität eine eigene Porositätsabhängigkeit zugeschrieben. Allerdings geht die geometrische Verteilung der Schmelze nicht ein, weiterhin kann die Volumenviskosität gegen Unendlich streben, wenn die Porosität gegen Null geht.

Hierbei sollte beachtet werden, dass es sich um eine effektive Volumenviskosität handelt und dass das Streben ins Unendliche physikalisch sinnvoll ist, da eine Pore in einem inkompressiblen Material durch allseitigen konstanten Druck nicht geschlossen werden kann. Dies gilt aber nur für inkompressible Materialien. In der Realität wird die Probe ab einem gewissen Druck selbst nachgeben und somit einem Anwachsen der Volumenviskosität ins Unendliche entgegen wirken.

Modell Schmeling

Nach Schmeling (2000) kann die Volumenviskosität η_b für isotrop verteilte Schmelzinkclusionen in erster Näherung aus der intrinsischen Scherviskosität η_m berechnet werden

$$\eta_{b_{schm}}(\varphi) = c_1 \eta_m \frac{c_2 - \varphi}{\varphi}. \quad (2.24)$$

η_m intrinsische Scherviskosität der Matrix, c_1 , c_2 Konstanten, φ Schmelzanteil

In einer Matrix mit schmelzgefüllten Röhren⁷ sowie elliptischen Schmelzeinschlüssen, die ein Querschnittsverhältnis von $a_r = 0.1$ aufweisen, können die Konstanten c_1 und c_2 zu $c_1 = 1.16$ und $c_2 = \frac{3}{4} \pi a_r$ bestimmt werden (Schmeling, 1985).

In diesem Gesetz wird, im Gegensatz zu 2.23, die Geometrie der Schmelzinklusion und deren Verteilung berücksichtigt jedoch kann dieses Gesetz ebenfalls wie in dem Modell von Richardson (Glg. 2.23) für kleine Porositäten eine gegen unendlich strebende Volumenviskosität erzeugen. Wie im vorhergehenden Modell erläutert, wird dies im Falle von kompressiblen Medien aber nicht eintreten.

⁷dreieckiger, spitzkantiger Querschnitt

Die vorgestellten Rheologien gehen innerhalb des physikalischen Gerüstes der Kanalisierungsinstabilität vorwiegend nur in ihren Grundzuständen ein. Lediglich der Vorfaktor der Porositätsabhängigkeit der Scherviskosität (a_1 Faktor, Glg. 2.21) wirkt sich auf die Wachstumsrate aus. Eine weiterführende Diskussion dieses Sachverhaltes erfolgt in Kapitel 3.

2.6.3 Der Einfluss von Wasser auf die Rheologie

Wie in der Einleitung beschrieben, soll der Einfluss von Wasser auf die Kanalisierungsinstabilität untersucht werden.

Dieser Einfluss wird in FDCON durch eine wasserabhängige intrinsische Matrixviskosität η_w realisiert (Hall und Parmentier, 2000).

Sie ist gegeben durch

$$\eta_w = \frac{c_{s0}}{c_s} \eta_m. \quad (2.25)$$

η_w wasserabhängige intrinsische Matrixviskosität, c_{s0} minimale Wasserkonzentration, ab der von einer wasserhaltigen Matrix gesprochen werden kann, c_s Wasserkonzentration der Matrix, η_m intrinsische Matrixviskosität

c_{s0} stellt die minimale Wasserkonzentration dar, ab der Gleichung 2.25 gilt, also eine Matrix als „nass“ angesehen werden kann. Hall und Parmentier geben c_{s0} mit 10 ppm H/Si an. Dieser Wert deckt sich mit den von Karato (2003) angegebenen Schranken der Wasserkonzentration eines „trockenen“ Olivins (1 – 10 ppm H/Si) unter Manteltemperatur- und -druckbedingungen.

Dementsprechend werden die intrinsische Viskosität und alle von ihr abhängigen Viskositäten aufgrund von Wasser um $\log(c_s/ppm) - 1$ Größenordnungen erniedrigt. Die weiteren Auswirkungen von Wasser auf die Kanalisierungsinstabilität werden in Kapitel 4 eingehend behandelt.

2.7 Die Permeabilitäts-Porositätsbeziehung

Die Permeabilität hängt entscheidend von der Form, Größe und Anordnung der Körner ab. So kann z.B. ein Sandstein durch ein Modell aus verdichteten Sphären beschrieben werden, während ein vulkanisches Gestein eher durch isotrop verteilte, dünne Kanäle beschrieben wird (Turcotte and Schubert, 2002). Turcotte und Schubert weisen jedoch darauf hin, dass sich die meisten theoretischen Modelle nur um Vor- und Geometriefaktoren unterscheiden. Verallgemeinert kann die Permeabilität aus der Porosität nach

$$k_{\varphi} = \frac{a^2}{b} \varphi^n \quad (2.26)$$

a Korngröße, $b = 100 - 3000$, $n \geq 2$ Geometriefaktoren

berechnet werden, wenn angenommen wird, dass die eigentlich anisotrop verteilten Schmelzeinschlüsse ein röhrenförmiges Kanalnetzwerk ausbilden, welches entlang von Korngrenzen verläuft und sich in Kornzwickeln trifft und weiterhin angenommen werden kann, dass die Matrix aus regelmäßigen symmetrischen Körner gleicher Größe besteht (Faul, 1997; Turcotte and Schubert, 2002).

In der Literatur variiert b in einem Bereich von $100 - 3000$. Weiterhin wird angegeben, dass n üblicherweise über 2 liegt. In Turcotte und Schubert ist für die oben beschriebene, vereinfachte Geometrie (Kanalnetzwerk) $n = 2$ und $b = 72 \pi$ zu finden. Werden Schmelzfilme, welche über das gesamte Korn verlaufen, anstelle dieses Kanalnetzwerkes angenommen, so gibt Schmeling (2000) $n = 3$ und $b = 648$ an. Faul (1997) weist weiter darauf hin, dass, wenn die Verbundenheit der Schmelzkanäle mit steigender Porosität zunimmt, auch höhere Werte für n angenommen werden können.

In dieser Arbeit werden $n = 3$ und $b = 648$ (Schmeling, 2000), sowie eine Korngröße von $a = 10^{-3}$ m verwendet (Turcotte and Schubert, Rabinowicz und Vigneresse (2004)).

2.8 Die Kompaktionslänge und -zahl

2.8.1 Die Kompaktionslänge

Mit Hilfe der von McKenzie (1984) eingeführten Kompaktionslänge δ_c können fluiddynamische Prozesse charakterisiert und Längen ggf. normiert werden.

Die Kompaktionslänge δ_c ist wie folgt definiert

$$\delta_c = \sqrt{k_\varphi \frac{(\eta_b + \frac{4}{3}\eta_s)}{\eta_f}}. \quad (2.27)$$

k_φ porositätsabhängige Permeabilität, $\eta_{b,s}$ effektive Volumen-, Matrixviskosität, η_f Schmelzviskosität

Die physikalische Bedeutung der Kompaktionslänge kann qualitativ folgendermaßen beschrieben werden:

Findet innerhalb einer porösen Matrix ein Netto-Ausstrom einer Flüssigkeit (z. B. Schmelze) statt, so wird die Matrix an einer impermeablen Schicht kompaktieren. Bedingt durch die höhere Auflast, kompaktieren Bereiche, die näher an der impermeablen Schicht liegen, stärker als solche, die sich weiter entfernt befinden.

Eine Analyse der unterschiedlichen Kompaktionsraten zeigt, dass der Abfall der Kompaktionsrate zu höher liegenden Schichten exponentiell ist. Dieser Gradient definiert die Kompaktionslänge δ_c , die so den Abstand zwischen der Kompaktionsrate an der impermeablen Schicht und deren e -tem Teil angibt.

Eine effektive Schmelzsegregation findet nur dann statt, wenn δ_c klein ist, folglich sich der Porenraum beim Verlassen der Schmelze entsprechend schließen kann, da keine partiell gefüllten Porenräume entstehen dürfen. Entsprechendes gilt für den umgekehrten Fall.

2.8.2 Die Kompaktionszahl

Die Motivation der Einführung der Kompaktionszahl

$$\varsigma = \delta_c^{-1}, \quad (2.28)$$

die als der reziproke Wert der Kompaktionslänge δ_c definiert ist, liegt darin, dass die Kompaktionszahl ς die gleich Dimension wie die Wellenzahl k aufweist, und somit leicht Vergleiche zwischen der Kompaktionszahl und der Wellenzahl durchgeführt werden können.

2.9 Normierung

Die Modelle werden üblicherweise normiert, hierdurch werden sie vergleichbar und können einfach auf beliebige Maßstäbe umskaliert werden. In dieser Arbeit bietet sich die nachfolgende Normierung an⁸ (gestrichene Größen = dimensionslose Größen)

$$\begin{aligned} x &= hx' & \vec{u} &= h\dot{\epsilon}_0\vec{u}' & t &= \frac{1}{\dot{\epsilon}_0}t' & \alpha &= \dot{\epsilon}_0\alpha' & (2.29) \\ \eta &= \eta_0\eta' & \sigma &= \eta_0\dot{\epsilon}_0\sigma' & P &= \eta_0\dot{\epsilon}_0P' & \Gamma &= \dot{\epsilon}_{II}\Gamma'. \end{aligned}$$

h Schichtdicke (Skalierungslänge), α Wachstumsrate (Glg. 3.8 und Glg. 3.9), $\dot{\epsilon}_0$ Skalierungsdehnungsrate, η_0 Skalierungsviskosität, Γ Wirbelstärke (Glg. 2.36), $\dot{\epsilon}_{II}$ Zweite Invariante des Dehnungsratentensors (Glg. 2.36)

Diese Normierung, angewendet auf die Impulserhaltungsgleichung der Schmelze (Glg. 2.4, $\vec{\nabla}P$ ist ersetzt durch Glg. 2.5), resultiert in

$$\vec{u}'_f - \vec{u}'_s = AZ(1 - \varphi)\delta_{i3} - \frac{1}{Rtn}\varphi^{n-1}\frac{\partial\tau'_{ij}}{\partial x'_j}, \quad (2.30)$$

⁸Die hier verwendete Normierung unterscheidet sich von der Normierung des Programms FDCON. Die in FDCON verwendete Normierung ist in Schmeling (2000, Kap. 3.2.5) zu finden.

sowie für die Impulserhaltungsgleichung der Matrix (Glg. 2.5) in

$$AZ \text{ Rtn } \varphi^n \delta_{i3} - \frac{1}{\dot{\varepsilon}_0 h} \vec{\nabla}' P + \frac{\partial \tau'_{ij}}{\partial x'_j} = 0, \quad (2.31)$$

wobei gestrichene Größen nicht-dimensionierte Größen sind.

Hierdurch ergeben sich zwei dimensionslose Größen, Rtn und AZ

2.9.1 Die Schmelz-Retentionzahl Rtn

Die Schmelz-Retentionzahl Rtn gibt an, wie stark die Schmelze beim Durchfluss durch die Matrix behindert wird

$$\text{Rtn} = \frac{\eta_f b h^2}{\eta_0 a^2}. \quad (2.32)$$

2.9.2 Die Aufstiegszahl AZ

Die Aufstiegszahl AZ ist ein Maß dafür, wie gut die Schmelze im Schwerfeld der Erde zu perkolieren/segregieren vermag im Verhältnis zur Dehnungsrate

$$AZ = \frac{k_{\varphi_0} \delta \rho g}{\varphi_0 \eta_f h \dot{\varepsilon}_0}. \quad (2.33)$$

$\delta \rho$ Dichtekontrast zwischen Schmelze und Matrix

2.9.3 Die Wellenzahl k'

Die Wellenzahl k wird, da allen numerischen Experimenten ein quadratisches Auswertebiet zugrunde liegt ($h \times h$), wie folgt definiert

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h}. \quad (2.34)$$

λ Wellenlänge, p Perioden pro Box, h Schichtdicke (Skalierungslänge)

Die Normierung der Wellenzahl erfolgt mit der Kompaktionslänge $\delta_{c,rheo}$

$$k'_{rheo} = k\delta_{c,rheo}. \quad (2.35)$$

Hierbei ist zu beachten, dass in dieser Arbeit verschiedene Rheologien für die Volumenviskosität verwendet werden und deswegen die jeweils zugehörige Volumenviskositätsrheologie bei der Berechnung der Kompaktionslänge berücksichtigt werden muss. Weiterhin wird, um eine porositätsunabhängige Skalierung zu erhalten, bei der Berechnung der Kompaktionslänge eine Referenzporosität von $\varphi_0 = 3\%$ verwendet. Für eine bessere Kennzeichnung werden bei den nachfolgenden Angaben der Kompaktionslängen die Rheologiekürzel, welche in den Gleichungen 2.22 bis 2.24 verwendet werden, mitangegeben. Sollte diese Angabe fehlen, dann ist die Rheologie von McKenzie (1984) zu verwenden. Weiterhin fällt bei der Berechnung der Kompaktionslänge unter den Bedingungen der *CBA* (Kap. 2.3) die Scherviskositätsabhängigkeit weg. Liegt dieser Fall vor, so ist dem Rheologiekürzel zusätzlich *CBA* angehängt.

Außerdem gilt, dass Wellenzahlen stets senkrecht zur maximalen Kompressionsspannung angegeben werden und im nachfolgenden Text immer die normierte Wellenzahl gemeint ist, weshalb aus stilistischen Gründen oftmals nicht mehr darauf hingewiesen wird.

2.10 Die Wirbelstärke

Durch die dimensionslose kinematische Wirbelstärke Γ' („vorticity“) kann der Anteil von Einfacher zu Reiner Scherung eines Deformationszustandes ausgedrückt werden. Sie ist in einem rechtsdrehenden Koordinatensystem definiert als (Means *et al.*, 1980)

$$\Gamma'_{21} = \frac{\Gamma_{21}}{\dot{\epsilon}_{II}} = \frac{\text{rot } \vec{u}}{\sqrt{2 \sum_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^2}} \stackrel{2D}{=} \frac{\vec{e}_3 \left(\frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)}{\sqrt{2 \sum_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^2}} = \frac{\vec{e}_3 (u_{zx} - u_{xz})}{\dot{\epsilon}_{II}} \quad (2.36)$$

bzw.

$$\Gamma'_{12} = \frac{\Gamma_{12}}{\dot{\varepsilon}_{II}} = \frac{\vec{e}_3 (u_{xz} - u_{zx})}{\dot{\varepsilon}_{II}}. \quad (2.37)$$

\vec{e}_3 Einheitsvektor in z -Richtung, $\dot{\varepsilon}_{II}$ Zweite Invariante des Dehnungsratentensors

Aus dieser Definition folgt

$$|\Gamma'| = \begin{cases} 0 & \text{Reine Scherung} \\ 0 \dots < 1 & \text{Superpositionierung Einfacher und Reiner Scherung} \\ 1 & \text{Einfache Scherung} \\ > 1 & \text{Wirbelstärke ist größer als die Dehnungsrate} \\ \infty & \text{„rigid-body“ Rotation} \end{cases} \quad (2.38)$$

(2.39)

sowie

$$\Gamma'_{12} < 0 \qquad \Gamma'_{21} > 0 \qquad \text{linksdrehend} \quad (2.40)$$

$$\Gamma'_{12} > 0 \qquad \Gamma'_{21} < 0 \qquad \text{rechtsdrehend.} \quad (2.41)$$

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt auf der Untersuchung der Bildung und des Wachstums von Kanälen in einer schmelzgefüllten Matrix unter verschiedenen Spannungszuständen. Wird solch ein Zweiphasensystem, bestehend aus einer hochviskosen, deformierbaren Matrix und einer niederviskosen Schmelze, einer zweidimensionalen Deformation ausgesetzt, tritt ein sich selbst verstärkender Prozess, die Kanalisierungsinstabilität, auf. Dieser Prozess der Bildung eines Kanals und dessen Wachstum können quantitativ für den Fall Reiner Scherung folgendermaßen verdeutlicht werden:

Für die Hintergrunddeformierung (Reine Scherung) gilt

$$\dot{\epsilon}_{xx} = -\dot{\epsilon}_{zz} = \pm\dot{\epsilon}_0 = \text{konst.} > 0. \quad (3.1)$$

Unter Vernachlässigung von Gravitation, Oberflächenspannungen zwischen Schmelze und Matrix und Variationen in z -Richtung und wenn keine Schmelzmigration stattfindet, ergibt sich aus einem Kräftegleichgewicht, dass die Normalspannung σ_{xx} konstant ist (Stevenson, 1989),

$$\sigma_{xx} = -P + 2\eta\dot{\epsilon}_0 \quad (3.2)$$

P Druck, η Scherviskosität der Matrix, $\dot{\epsilon}_0$ Dehnungsrate

Unter der Annahme kleiner Porositätsvariationen in x -Richtung, mit φ_1 und φ_2 zweier unterschiedlicher, aneinander grenzender Porositätsgebiete (OBdA $\varphi_1 < \varphi_2$), folgt aus Gleichung 2.21 (S. 33), dass in den beiden Gebieten die Viskosität

$$\eta_1(\varphi_1) > \eta_2(\varphi_2) \quad (3.3)$$

herrscht. Aufgrund dieser Ungleichung folgt für die deviatorische Spannung

$$\tau_{xx} = \sigma_{xx} + P = 2\eta\dot{\epsilon}_0 \rightarrow \tau_{1xx} > \tau_{2xx}, \quad (3.4)$$

also

$$2\eta_1\dot{\varepsilon}_0 = \sigma_{1xx} + P_1 > \sigma_{2xx} + P_2 = 2\eta_2\dot{\varepsilon}_0. \quad (3.5)$$

Unter der Nebenbedingung, dass die Normalspannung σ_{xx} an der Grenzfläche zwischen Schmelze und Matrix stetig ist (Stevenson, 1989)

$$\sigma_{1xx} = \sigma_{2xx}, \quad (3.6)$$

ergibt sich, damit diese Randbedingung erfüllt wird, dass sich, da in den beiden Gebieten die gleiche Dehnungsrate herrscht, der Druck entsprechend anpassen muss, also

$$P_1 > P_2. \quad (3.7)$$

Der hierdurch entstehende Druckgradient drückt die Schmelze von Gebiet 1 in das Gebiet 2. Dies führt zu einer weiteren Erhöhung des Porositätsgefälles zwischen diesen beiden Regionen und so zu einem sich selbst verstärkenden Prozess.

Dieser qualitativ erläuterte und in Abbildung 3.1 skizzierte Prozess kann quantitativ durch eine 1D lineare Stabilitätsanalyse, welche im Detail im Anhang C durchgeführt ist, beschrieben werden. Das Resultat dieser Analyse ist, dass die normierte Wachstumsrate α' für eine 1D sinusförmige Störung gegeben ist durch

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\dot{\varepsilon}_0} = \frac{2a_1(1 - \varphi_0) \frac{k_\varphi}{\eta_f} \eta_{s0} k^2}{1 + (\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}) \frac{k_\varphi}{\eta_f} k^2} = \frac{2a_1(1 - \varphi_0) \frac{k_\varphi}{\eta_f} \eta_{s0} k^2}{1 + \delta_{c0,rheo}^2 k^2}. \quad (3.8)$$

φ_0 Hintergrundporosität, k_{φ_0} Hintergrundpermeabilität,

$\eta_{f0,b0,s0}$ Hintergrund(schmelz-, volumen-, matrix-)viskosität, $\dot{\varepsilon}_0$ Hintergrunddehnungsrate,

a_1 Kohlstedtfaktor, k dimensionierte Wellenzahl, $\delta_{c0,rheo}$ Rheologie abhängige Kompaktionszahl

Gleichung 3.8 ist unter Vernachlässigung des Terms $(1 - \varphi_0)$ mit der von Stevenson (1989, Glg. 13) angegebenen Wachstumsrate identisch.

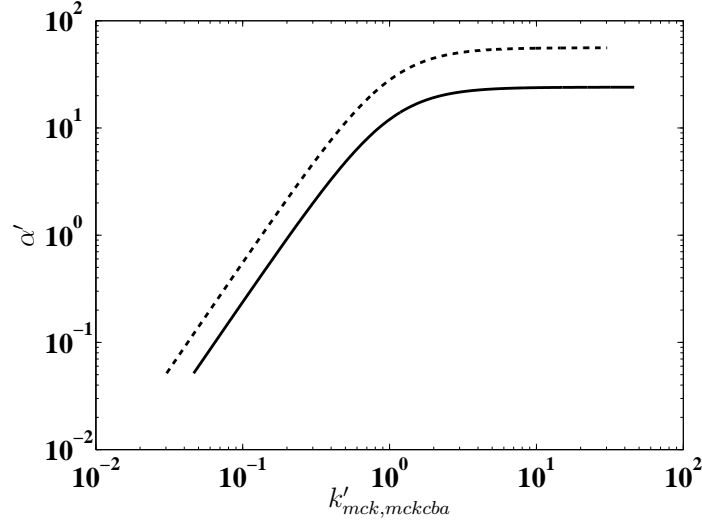


Abbildung 3.2. Exemplarischer Verlauf der normierten Wachstumsrate α' in Abhängigkeit der normierten Wellenzahlen k'_{mck} und k'_{mckcba}

— Wachstumsrate ohne CBA - - - Wachstumsrate mit CBA

Parameter der Kurvenberechnung (Glg. 3.8, Glg. 3.9):

$$\begin{array}{lll}
 a_1 = 28 & \varphi_0 = 3.0\% & k_\varphi = 4.1 \cdot 10^{-14} \text{ m}^2 \\
 \eta_f = 0.77 \text{ Pa s} & \eta_{s0} = \eta_{b0} = 4.3 \cdot 10^{14} \text{ Pa s} & \dot{\varepsilon}_0 = 10^{-10} \text{ s}^{-1}
 \end{array}$$

Aus den Gleichungen 3.8 und 3.9 und der Abbildung 3.2 geht hervor, dass für $k'_{rheo} \ll 1$ die Wachstumsraten eine identische Steigung aufweisen und wenn anstelle der intrinsischen Volumenviskosität η_{b0} in Gleichung 3.9 eine effektive Volumenviskosität

$$\eta_{b_{eff}} = \eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0} \quad (3.10)$$

benutzt wird, diese beiden Kurven exakt aufeinander zu liegen kommen.

Ein weiterer Effekt stellt sich ein, wenn sehr kleine Wellenzahlen untersucht werden. Dann kann der Nenner aus Gleichung 3.8 und 3.9 vernachlässigt werden, und die Wachstumsrate ist lediglich vom Zähler abhängig. Dies bedeutet ebenfalls dass, da die Anwendung der CBA im Rahmen der Wachstumsrate nur den Nenner beeinflusst, dieser vernachlässigt werden kann und folglich die von Schmeling (2000) eingeführte Erweiterung der BA, die CBA, bei großskaligen Problemen, wie Mantelkonvektion, anwendbar ist. Dadurch kann

die signifikante Segregation/Perkolation der Schmelze, welche durch die Kompaktion der Matrix hervorgerufen wird, zusätzlich zu der durch den Auftrieb der Schmelze entstehenden Strömung, berücksichtigt werden.

3.1 Der Einfluss der Rheologie auf die Kanalisierungsinstabilität

Aus der linearen Stabilitätsanalyse geht hervor, dass lediglich die Rheologien des Grundzustandes in der Lösung der Kanalisierungsinstabilität auftreten (Anhang C). Weiterhin ergibt sich, dass aufgrund der Linearisierung nur die φ -Abhängigkeit der Scherviskosität $\left| \eta_s^{-1} \frac{\partial \eta_s}{\partial \varphi} \right| = a_1$ in die Gleichung der Wachstumsrate (Glg. 3.8) eingeht, während die der Volumenviskosität keinen weiteren Einfluss auf die Kanalisierungsinstabilität nimmt. Außerdem ist aus Gleichung 3.8 ersichtlich, dass für große Wellenzahlen

$$\alpha'_{k \gg \varsigma} \leq \frac{2\eta_{s0}}{\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}} \left| \eta_s^{-1} \frac{\partial \eta_s}{\partial \varphi} \right| = \frac{2\eta_{s0}}{\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}} a_1 \quad (3.11)$$

gilt. Aufgrund der hier vorgestellten Rheologien ergibt sich bei der von McKenzie vorgeschlagenen Rheologie der Volumenviskosität (Glg. 2.22) für große Wellenzahlen eine maximale Wachstumsrate

$$\alpha'_{max} = \frac{6}{7} a_1 \approx O(a_1). \quad (3.12)$$

Sollte jedoch die Volumenviskosität $\eta_{b0} < \frac{2}{3}\eta_{s0}$ werden, dann würde sich für große Wellenzahlen nach Gleichung 3.8 eine Wachstumsrate $\alpha' > a_1$ einstellen.

Rein physikalisch ist für kleine Porositäten eine Volumenviskosität, die kleiner ist als die Scherviskosität, unrealistisch, da der Schermodul eines Stoffes i.A. geringer ist als dessen „Bulk“-Modul. Aus diesem Grund wäre eine physikalisch sinnvolle Untergrenze der Volumenviskosität ihr Gleichsetzen mit der Scherviskosität, so wie es McKenzie (1984) angewendet hat. Alle anderen in Kapitel 2.6 vorgestellten Rheologien führen zu einer weitaus größeren Volumenviskosität als die der Scherviskosität und damit zu einer Abschwächung der Kanalisierungsinstabilität. Dieser beschriebene Effekt der unterschiedlichen Rheologien

für die Volumenviskosität ist deutlich in Abbildung 6.2 (S. 73) zu erkennen. Die dunkelrote Kurve (Rheologie von McKenzie) liegt über allen anderen theoretischen Kurven.

Die Bestimmung der Volumenviskosität eines Materials ist bis heute nur sehr schwer möglich und mit vielen Fehlern behaftet. Durch die Berücksichtigung der realen Bildungszeit von Kanälen und ferner dadurch, dass die Volumenviskosität lediglich im Grundzustand in die Theorie der Kanalisierungsinstabilität eingeht, bestünde meiner Meinung nach eine Nebenbedingung für die Größenordnung der Volumenviskosität, insofern sich keine anderen Kanalisierungsinstabilitäten, wie z.B. die des chemisch-reaktiven Flusses, mit der hier untersuchten überlagern. Eine sehr viel größere Volumenviskosität als die Scherviskosität ist unrealistisch, da sonst die Wachstumsrate zu stark abnimmt (Glg 3.11), um realistische Aufstiegszeiten für die Schmelze zu erhalten.

Im Falle von kleinen Porositäten tritt ein abgeschwächtes Wachstum von Kanälen auf, bis hin keinerlei Wachstum bei $\varphi = 0$. Dieses Verhalten wird unabhängig von der Rheologiewahl der Volumenviskosität durch die gegen Null strebende Permeabilität verursacht.

3.2 Die Kanalisierungsinstabilität bei großen Wellenzahlen

Die Theorie von Stevenson (1989) zeigt, dass die Wachstumsrate für große Wellenzahlen konstant ist, d.h. nicht wieder abfällt. Dies führt dazu, dass sich alle Wellenzahlen, welche größer als eine kritische Wellenzahl k'_{kri} sind, gleich stark verstärken. Diese gleichmäßige Verstärkung ist allerdings physikalisch nicht sinnvoll; zumindestens, wenn die Wellenlänge Korngröße erreicht, muss ein Abfall der Wachstumsrate eintreten. Abgesehen von dieser natürlichen Grenze, sollte für die Wellenzahl eine obere Grenze, die zwischen k'_{kri} und k'_{korn} liegt, bestehen, bei der ein frühzeitiger Abfall der Wachstumsrate eintritt. Ein Grund hierfür ist, dass z.B. bei den Feldbeobachtungen am Oman Ophiolite von Kelemen *et al.* (2000, Absatzmarke 25 und Abb. 7) keine dünneren Dunitkanäle als ~ 0.01 m gefunden wurden.

Derzeit stehen zwei Theorien zur Diskussion, die solch eine Grenze in die Physik der Kanalisierungsinstabilität einzuflechten versuchen. Die eine wird von Hall und Parmentier (2000) vorgeschlagen, setzt allerdings das Vorhandensein von Wasser sowie ein stetiges Aufschmelzen der Matrix voraus. In ihrer Theorie wird in der Erhaltungsgleichung des Wassers (Glg. 4.1) ein diffusiver Term berücksichtigt.

Hierdurch und unter Berücksichtigung einer Aufschmelzrate $\partial\varphi/\partial t$, wird ein der Wachstumsrate entgegengesetzter Prozess induziert, der ein Anwachsen von Kanälen unterdrückt. Hall und Parmentier (2000) beschreiben diesen Prozess quantitativ dadurch, dass ab einer bestimmten Wellenzahl die Diffusion von Wassermolekülen größer werden kann als der Transport von Wasser mit der Schmelze werden kann. Hierdurch hat Wasser, welches eigentlich aus der Region mit dem geringeren Schmelzanteil wegtransportiert wird, die Möglichkeit, wieder in diese zurück zu diffundieren und somit eine erneute Erweichung dieser Region herbeizuführen, wodurch sich die Wachstumsrate erniedrigt. Nach Gleichung 12 aus Hall und Parmentier setzt dieser Prozess ab einer Wellenzahl von

$$k_{hall} \approx \left(\frac{\varphi \kappa_{H_2O} \delta_{c,mck}^2}{\Upsilon} \right)^{-1/4} \quad (3.13)$$

φ Porosität, κ_{H_2O} Diffusionskoeffizient für Wasser, $\delta_{c,mck}$ Kompaktionslänge nach McKenzie, Υ Aufschmelzrate

ein. Eine genauere Analyse dieses Prozesses ist in Kapitel 4.2 gegeben.

Einen anderen Weg, der auch für eine trockene Matrix angewendet werden kann, schlagen Rabinowicz und Vigneresse (2004) vor. In ihrer Theorie, bei der für die Impulserhaltungsgleichung der Matrix eine visko-plastische Rheologie zur Anwendung kommt, wird in der Impulserhaltungsgleichung der Schmelze ein zusätzlicher Term berücksichtigt, der die Partitionierungs-Oberflächenenergie zwischen Schmelze und Matrix darstellt. Dieser Term wurde von ihnen eingeführt, da die Erzeugung von vielen dünnen im Gegensatz zu einigen dickeren Kanälen, die den gleichen Schmelzdurchsatz wie erstere aufweisen, mehr Energie kostet und dadurch energetisch ungünstiger ist. Infolgedessen bevorzugt das System

dickere Kanäle, und es kommt zu einem Abfallen der Wachstumsrate bei Wellenzahlen k , die größer als die Kompaktionszahl ς sind. Diese Oberflächenenergie ist gegeben durch (Bercovici und Karato, 2003, letzter Summand der Glg. 17)

$$\omega [\Delta P \nabla \varphi + \nabla (\sigma \beta)] . \quad (3.14)$$

$\omega = \varphi$ Oberflächenenergiepartitionierungsfunktion (Annahme von Rabinowicz und Vigneresse (2004)), σ Oberflächenspannung,

$\beta = \beta_0 \varphi^a (1 - \varphi)^b$ porositätsabhängige Oberfläche pro Volumen ($a, b \leq 1$)

Allerdings vernachlässigten Rabinowicz und Vigneresse diesen Effekt bei ihrer analytischen Lösung der Kanalisierungsinstabilität wieder, da bei einer Betrachtung kleiner Porositätsperturbationen die Energieeinflüsse nur zweiter Ordnung sind, wobei sie jedoch darauf hinweisen, dass dadurch eine Übersimplifizierung des Gesamtprozesses erfolgt. Diese Übersimplifizierung führt aber wiederum dazu, dass ihre Analyse ebenfalls eine Wachstumsrate, die proportional zu $a k^2 / (1 + b k^2)$ ist, liefert. Trotzdem sind sie der Meinung, dass die Energie an den Grenzflächen größerer Perturbationen, aufgrund der Viskositätsunterschiede zwischen der Matrix und der Schmelze, erheblich ist und zu dem besagten Abfall der Wachstumsrate führen sollte.

In der Einleitung (Kap. 1.4) wurde eingehend auf den physikalischen Einfluss von Wasser, welches im oberen Mantel gelöst ist, eingegangen. So gehen Ringwood (1975), Ahrens (1989) und Peacock (1990) auf die Herkunft des im Mantel gelösten Wassers ein; dessen mögliche Verteilung untersuchen Thompson (1992), Sobolev und Chaussidon (1995), Bolfan-Casanova *et al.* (2000) und Murakami *et al.* (2002). Den Einfluss des Wassers auf die Rheologie analysieren Hirth und Kohlstedt (1996), Hall und Parmentier (2000), Bercovici und Karato (2003) und Hofmann (2003), um für jedes Teilgebiet nur einige zu nennen.

Im vorliegenden Kapitel wird näher auf die geodynamischen Gleichungen bezüglich des Wassers und deren Implementierung in FDCON eingegangen, sowie auf deren Einfluss auf die Kanalisierungsinstabilität.

4.1 Die Erhaltungsgleichung für das Wasser

Hall und Parmentiers (2000) erste Gleichung beschreibt die vollständige Erhaltungsgleichung¹ für Wasser unter geodynamischen Gesichtspunkten. Sie ist gegeben durch

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi c_f + (1 - \varphi) c_s) = -\vec{\nabla} \cdot (-\varphi \kappa_{H_2O} \nabla c_f + \varphi c_f \vec{u}_f + (1 - \varphi) c_s \vec{u}_s). \quad (4.1)$$

$c_{f,s}$ Wasserkonzentration in der Schmelze bzw. Matrix, φ Porosität, $\vec{u}_{f,s}$ Geschwindigkeit der Schmelze bzw. Matrix, κ_{H_2O} Diffusionskoeffizient für Wasser

Gleichung 4.1 beschreibt den Transport von Wasser, welches in der Matrix und der Schmelze gelöst ist, aufgrund von Advektion des Gesamtsystems, Segregation der Schmelze, sowie die Diffusion von Wasser in der Schmelze.

¹berücksichtigt nicht die Generation oder Kristallisation von Schmelze

4.1.1 Der Partitionskoeffizient von Wasser

Durch die Einführung des Partitionskoeffizienten D (Shaw, 1970) kann einer der beiden Wassergehalte in Gleichung 4.1 durch den anderen ersetzt werden. Für die relative Konzentration eines Stoffes in einer Phase gilt

$$c_f = \frac{c_0}{D(1 - \varphi) + \varphi} = \frac{c_s}{D} \quad (4.2)$$

mit

$$D = \frac{c_s}{c_f}, \quad (4.3)$$

dem Partitionskoeffizienten.

Er gibt an, wie kompatibel ein Stoff (Wasser) gegenüber zwei Komponenten (hier: Matrix und Schmelze) ist. Liegt D unterhalb von 1, so ist der Stoff gegenüber der im Zähler stehenden Komponente inkompatibel. Inkompatibilität bedeutet in diesem Falle, dass die Konzentration des Stoffes in der entsprechenden Komponente abnimmt und infolgedessen die Konzentration in der zweiten beteiligten Komponente zunimmt. Für die zwei Komponenten Matrix und Schmelze liegt der Partitionskoeffizient für Wasser bei $D = 0.01$ (Hirth und Kohlstedt, 1996).

4.2 Der Einfluss von Wasser auf die Kanalisierungsinstabilität

Wie in der Einleitung erwähnt und in Kapitel 3 gezeigt, weisen Kanäle, deren Wellenzahl größer als die Kompaktionszahl ς ist, eine konstante Wachstumsrate auf ($\alpha'(k \gg \varsigma) = \text{konst.}$).

Hall und Parmentier (2000) konnten jedoch unter Berücksichtigung von Wasser einen Abfall der Wachstumsrate bei großen Wellenzahlen $k \geq \varsigma$ erfolgreich in die Theorie implementieren:

Ihrer Meinung nach sollte die Diffusion von Wasser innerhalb der Schmelze bei Wellenzahlen $k \geq \varsigma$ schneller ablaufen als die Advektion des gelösten Wassers mit ihr. Hierdurch

könnte innerhalb entsprechend kleiner Skalen Wasser, welches sich in Zonen erhöhter Porosität befindet, zurück in Zonen erniedrigter Porosität diffundieren. Dort verursacht dieses zusätzliche Wasser in der Schmelze ein Ungleichgewicht zwischen der Wasserkonzentration der Schmelze und der Matrix, was zur Folge hat, dass die Schmelze Wasser an die Matrix abgibt und diese somit erweicht.

Nach ihrer Analyse tritt durch diesen Effekt eine maximale Wachstumsrate bei $k_{hall} \approx (\varphi \kappa_{H_2O} \delta_c^2 / \Upsilon)^{-1/4}$ (Glg. 3.13) auf. Dieser Abfall der Wachstumsrate bei großen Wellenzahlen kann mit FDCON nicht nachgewiesen werden, da zum einen die Implementierung der Wassererhaltungsgleichung davon ausgeht, dass die Diffusion von Wasser wesentlich langsamer abläuft als die hier beobachteten Prozesse (Abb. 2.1) und sie aus diesem Grund im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt werden kann, und zum anderen können mit FDCON aus numerischen Gründen solch große Wellenzahlen ab denen die Diffusion eine Rolle spielt, nicht simuliert werden.

Jedoch kann ein weiterer Effekt von Wasser im Zusammenhang mit der Kanalisierungsinstabilität beobachtet werden. Da Wasser die intrinsische Viskosität herabsetzt, die Instabilität jedoch um so effektiver wirkt, je härter die Matrix ist, kommt es bei nassen Medien zu einer Abschwächung der Kanalisierungsinstabilität (Abb. 4.1, Abb. 6.2, S. 73).

Die zu erwartende Porosität für oberes Mantelgestein liegt bei 2 – 7% (Seyler *et al.* (2001) 2%, Dick (1977) 6 – 7%). Aus diesem Grund wurde für die Veranschaulichung dieses Effekts ein initiales Porositätsfeld von $\varphi_0 = 3\%$ mit einer Porositätsstörung von $\delta\varphi = \pm 0.25\%$ gewählt (Abb. 4.1.a). Die weiteren Parameter dieses Versuches sind $h = 1000$ m, $b = 648$, $a = 0.001$ m, $\eta_0 = 10^{15}$ Pa s und $\eta_f = 0.77$ Pa s, wodurch sich ein $Rtn = 0.5$ ergibt (Die Referenzen zu diesen Werten sind im Anhang A.2 zu finden). Weiterhin wurde ohne Auftrieb ($AZ = 0$) und mit der Rheologie von McKenzie (Glg. 2.22) gerechnet. Die kinematischen Randbedingungen sind so gewählt, dass Einfache Scherung mit einer Dehnungsrate von $\dot{\epsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ simuliert wird.

Um den Effekt des Wassers hervorzuheben, wurde eine initiale Wasserverteilung, wie sie in Abbildung 4.1.b zu sehen ist, verwendet. Die linke Seite weist eine Wasserkonzentration

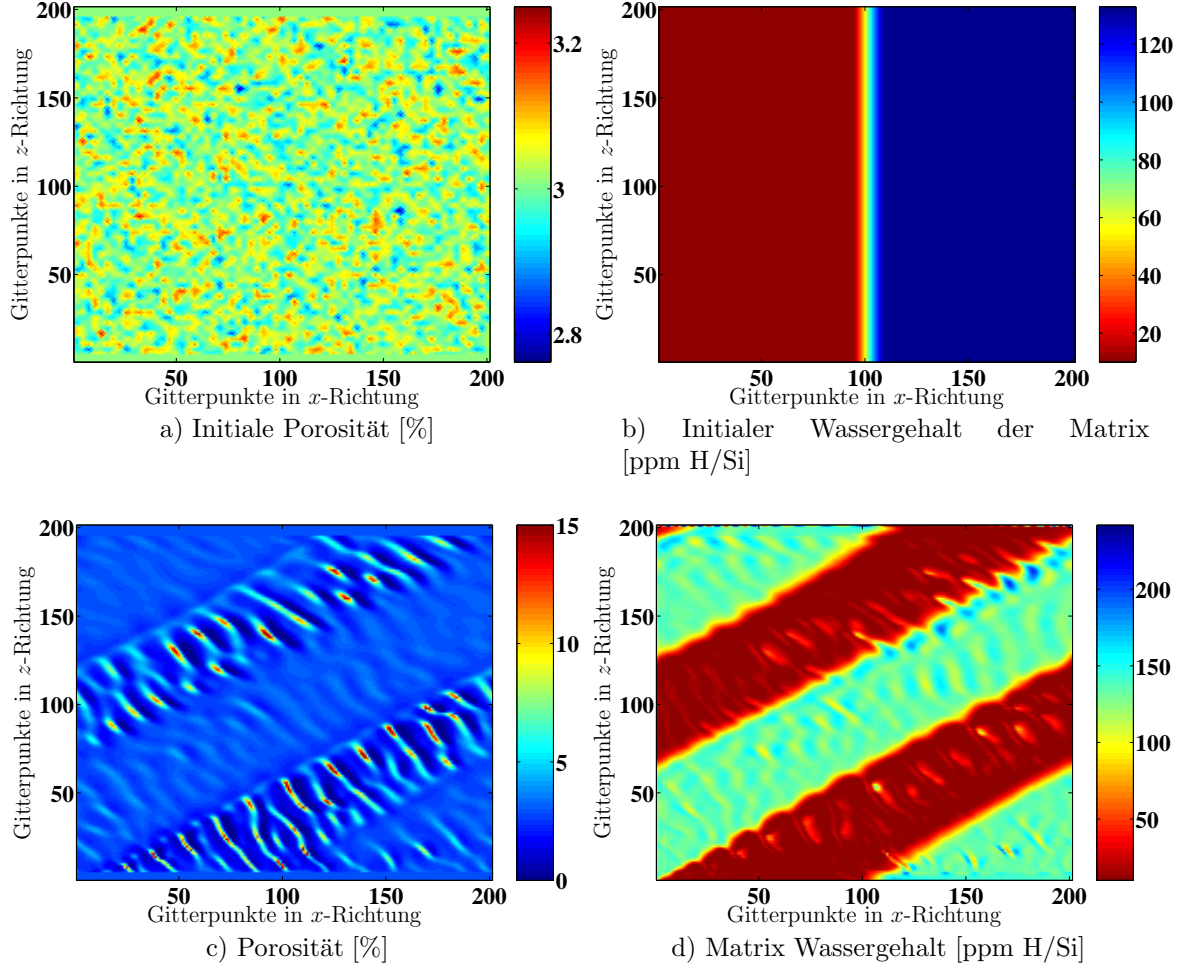


Abbildung 4.1. Porositäts- und Wasserverteilung am Beispiel eines Scherdehnungsexperimentes FILE01b

von 10 ppm H/Si auf, was mit $c_{s0} = 10$ ppm H/Si zu keiner Erniedrigung der intrinsischen Viskosität führt, während der rechte Teil eine Wasserkonzentration von 130 ppm H/Si aufweist, was in einer Senkung von η_m von mehr als eine Größenordnung resultiert.

Deutlich erkennbar ist, dass sich in den wasserarmen Regionen (≈ 10 ppm H/Si, roter Bereich in Abb. 4.1.d) nach einer Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} \approx 0.8$ gut ausgeprägte Kanäle (max. Amplitude 15%) ausgebildet haben, während sich in dem Bereich, in dem viel Wasser (≈ 200 ppm H/Si, grün-blauer Bereich in Abb. 4.1.d) vorhanden ist, zwar ebenfalls Kanäle ausbilden, diese aber sehr viel schwächer ausfallen (max. Amplitude $\approx 5\%$). Diese

unterschiedlichen Wachstumsraten beruhen auf der Art und Weise, wie Wasser Einfluss auf das Gesamtsystem nimmt. Nach der hier verwendeten Methode (Glg. 2.25) nimmt Wasser lediglich Einfluss auf die intrinsische Viskosität der Matrix. Wird nun die Viskosität aufgrund von Wasser herabgesetzt, folgt, dass sich auch die Wachstumsrate erniedrigt. Dementsprechend wirkt die Kanalisierungsinstabilität bei Wellenzahlen $k \leq \varsigma$ um so effektiver, je trockener ein Medium ist. Bei Wellenzahlen $k > \varsigma$ tritt dieser Effekt nicht auf, da sich die Viskositätsabhängigkeit herauskürzt und wie gezeigt (Kap. 3.1) die Wachstumsrate $\alpha \approx O(a_1)$ ist.

Ein Großteil dieser Arbeit widmet sich der Implementierung neuer Gesetze und Randbedingungen in FDCON. Eine der ersten Erweiterungen besteht in der Erhöhung der Rechengenauigkeit von FDCON, der Implementierung der Randbedingung Einfache Scherung und der in Kapitel 2.6 beschriebenen Rheologien. Weiterhin musste die Erhaltungsgleichung für Wasser (Glg. 4.1) sowie deren zusätzliches Viskositätsgesetz (Glg. 2.25) programmiert werden. Die obigen Neuerungen werden im Folgenden näher beschrieben.

5.1 Verbesserung der Genauigkeit

Das Anfangswertproblem der Massenerhaltung wird in FDCON durch ein Upwind-Schema gelöst (Press *et al.*, 1992, S. 832). Die auftretenden einseitigen Differenzenquotienten werden üblicherweise durch ein Finite-Differenzenquotienten-Schema (FDS) erster Fehlerordnung (Glg. 5.2) ersetzt (Press *et al.*, 1992, s. 832).

Die bei Verwendung dieses FDSs bei einer Dehnungsrate von $\dot{\epsilon}_0 = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ und Boxdimensionen im Kilometerbereich auftretende numerische Diffusion beeinflusst das Segregationsverhalten derart nachhaltig, dass eine Auswertung der Ergebnisse nicht möglich ist. Eine Reduktion der Dehnungsrate und damit gleichermaßen eine Verkleinerung der numerischen Diffusion kommt nicht in Frage, da dadurch eine akzeptable Rechenzeit überstiegen wird. Eine andere und hier realisierte Möglichkeit ist, das FDS erster Fehlerordnung durch ein FDS zweiter Fehlerordnung zu ersetzen.

Das reguläre Upwind-Verfahren beruht darauf, dass die räumliche Ableitung an einem Punkt durch einen einseitigen Differenzenquotienten in entgegengesetzter Richtung der Fließgeschwindigkeit an diesem Punkt beschrieben wird

$$\frac{f(x_i, t_{n+1}) - f(x_i, t_n)}{\Delta t} = -u_x^n \begin{cases} \frac{f(x_i, t_n) - f(x_{i-1}, t_n)}{\Delta x} & u_x^n > 0 \\ \frac{f(x_{i+1}, t_n) - f(x_i, t_n)}{\Delta x} & u_x^n < 0. \end{cases} \quad (5.1)$$

$f(x, t)$ Funktion, welche von x und t abhängt, x_i Raumkoordinate am Punkt i ,
 t_n Zeitschritt, u Geschwindigkeit, Δt Zeitinkrement, Δx Längeninkrement

Üblicherweise wird für die auftretende räumliche Ableitung ein einseitiger Differenzenquotient nach Gleichung 5.2 angewendet (Schmeling, 1990, s. 16)

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \stackrel{O_1}{\approx} \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{\delta x}. \quad (5.2)$$

Gleichung 5.2 hat allerdings den Nachteil, dass sie nur von erster Fehlerordnung ist, hierdurch also ein erheblicher numerischer Fehler auftritt. Durch Hinzunahme eines weiteren Gitterpunktes wird der Fehler um eine Ordnung verringert ($O(\delta x^2)$). Hierdurch ergibt sich die Ableitung nach x am Punkt x_i (Kasten) für einen nach vorne gerichteten Finite-Differenzenquotienten zweiter Fehlerordnung zu

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \stackrel{O(\delta x^2)}{\approx} \frac{1}{\delta x} \left(\boxed{-\frac{3}{2}f(x_i)} + 2f(x_{i+1}) - \frac{1}{2}f(x_{i+2}) \right), \quad (5.3)$$

entsprechend gilt für einen nach hinten gerichteten Finite-Differenzenquotienten zweiter Fehlerordnung

$$\frac{\partial f(x_i)}{\partial x} \stackrel{O(\delta x^2)}{\approx} \frac{1}{\delta x} \left(\frac{1}{2}f(x_{i-2}) - 2f(x_{i-1}) + \boxed{\frac{3}{2}f(x_i)} \right). \quad (5.4)$$

Durch diese Formulierung kann sich eine Komplikation an den Punkten ergeben, die nur einen Zähler vom Rand entfernt sind. Zeigt die Geschwindigkeit an diesem Punkt von diesem Rand weg, so wird in Gleichung 5.3 bzw. 5.4 ein Punkt benötigt, der außerhalb des Gitters liegt (letzter Term der Summe in Gleichung 5.3 bzw. erster Term der Summe in Gleichung 5.4). Diese Komplikation wird in FDCON dadurch umgangen, dass in diesem Fall Gleichung 5.2 zur Berechnung der Ableitung benutzt wird.

Zusätzlich wurde die bestehende Programmierung der Ableitungen am Rand, die unter anderem virtuelle¹ Gitterpunkte zu ihrer Berechnung benutzt, ebenfalls durch die jeweilige einseitige Approximation, zweiter Fehlerordnung ersetzt (Glg. 5.3 bzw. 5.4).

Ein weiterer Gewinn an Genauigkeit kann erreicht werden, wenn im Code darauf geachtet wird, dass die implementierten, doppelt genau rechnenden Funktionen Fortrans genutzt werden (alle exponentiell dargestellten Größen werden durch Verwendung der Form „d“ anstelle von „e“ doppelt genaue Gleitpunktzahlen in Exponentialschreibweise. Doppelt genaue Ergebnisse ebensolcher Argumente werden durch Verwendung der entsprechenden Funktion erzeugt, die Funktion *ABS* wird so durch *DABS* ersetzt).

Durch die oben beschriebenen Maßnahmen konnte FDCON soweit verfeinert werden, dass eine Untersuchung der Kanalisierungsinstabilität möglich ist. Hervorzuheben ist, dass die Verbesserung des Upwind-Verfahrens um eine Fehlerordnung den größten Gewinn an Genauigkeit ausmacht.

Beide FDS wurden an zwei unterschiedlichen initialen elliptischen Porositätsverteilungen getestet. Die Hintergrundporosität betrug jeweils $\varphi_0 = 3\%$ mit einer Porositätsstörung von $\delta\varphi = 0.1\%$. Die beiden Porositätsverteilungen unterschieden sich lediglich im Übergang des Maximalwertes der Porosität zur Hintergrundporosität. Zum einen erfolgte dieser Übergang abrupt (Horizontalquerschnitt der Porosität: Abb. 5.1.a, durchgezogene Linie) und zum anderen durch einen \cos^2 geglättet (Horizontalquerschnitt der Porosität: Abb. 5.1.b, durchgezogene Linie, vergleichbare Aufsicht: Abb. 6.6.c, S. 81). Des Weiteren wurden die Ellipsen um 45° gedreht und wiesen ein Achsenverhältnis von $a : b = 5 : 1$ auf.

Da einem Großteil dieser Arbeit der Spannungszustand Einfache Scherung zugrunde liegt, wurden die beiden initialen Verteilungen zum Testen der FDS Einfacher Scherung mit einer Dehnungsrate von $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ ausgesetzt, bis eine Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} = 0.08$ erreicht wurde. Weitere, diesen Versuch bestimmende, Parameter sind:

$Rtn = 0.5$ mit $h = 1000 \text{ m}$, $\eta_0 = 10^{15} \text{ Pa s}$, $\eta_f = 0.77 \text{ Pa s}$, $a = 0.001 \text{ m}$, $b = 648$, $n = 3$ und $AZ = 0$.

¹d.h. außerhalb des Gitters liegende Punkte

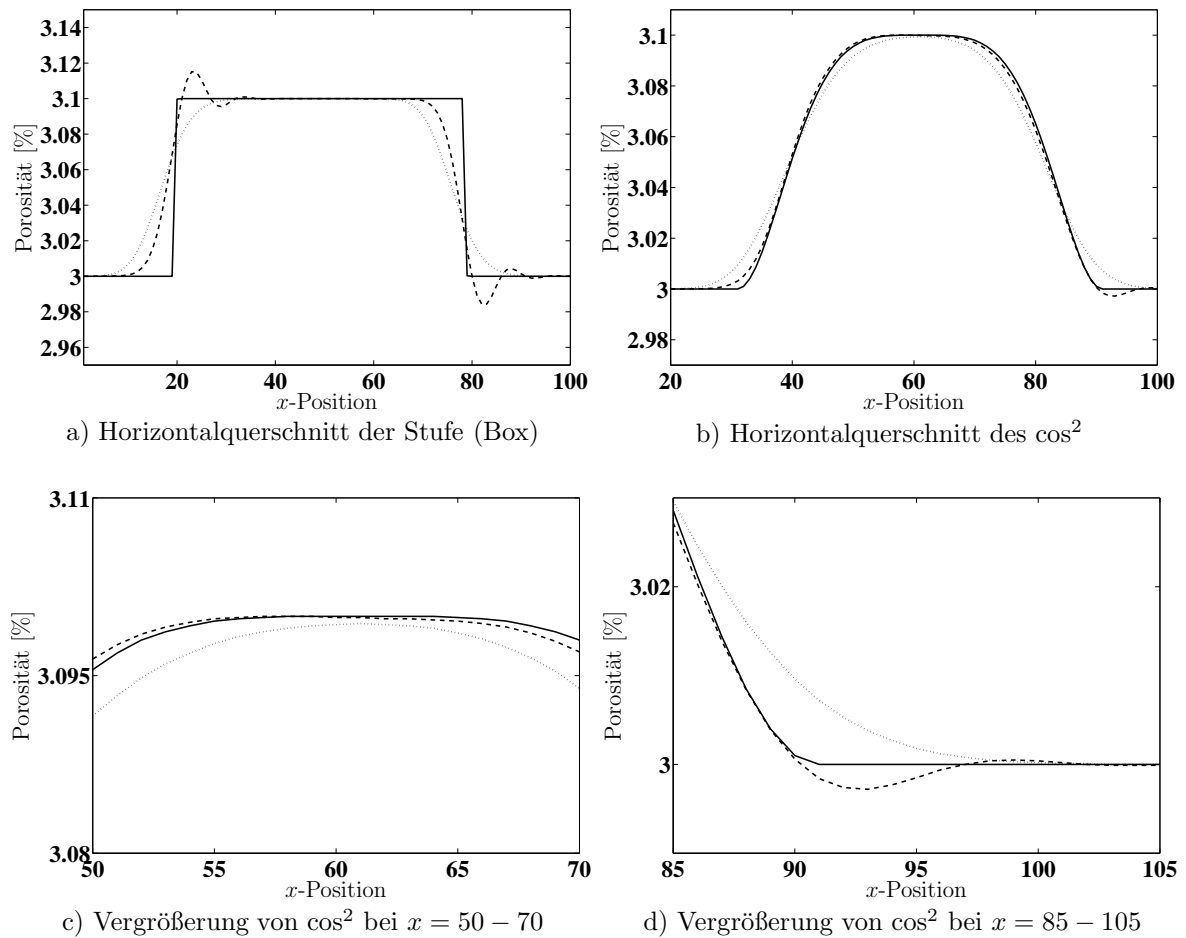


Abbildung 5.1. Test der Genauigkeiten der Verfahren verschiedener Fehlerordnungen anhand zwei verschiedener Strukturen

——— Initiale Porositätsverteilung Versuch mit Fehlerordnung O1
 - - - Versuch mit Fehlerordnung O2

Mit zunehmender Scherung werden die Strukturen immer weiter nach rechts advektiert. Um die Ergebnisse dieser Tests jedoch mit der Initialverteilung und untereinander zu vergleichen, sind die Ergebniskurven auf die initiale Position der Struktur zurück verschoben worden. Bedingt durch die geringen Verschiebungsmöglichkeiten im Auswerteprogramm Matlab (es können nur ganze Gitterpunkte verschoben werden), konnte keine genaue Deckung der Kurven erreicht werden.

Fall I: Porositätssprung

In Abbildung 5.1.a tritt bei Verwendung von Gleichung 5.2 deutlich eine störende Verbreiterung/Verschmierung der Ellipse auf (gepunktete Linie).

Wird hingegen Gleichung 5.3 verwendet, so verbreitert sich die Störung nur geringfügig, und das Plateau der Störung wird in einem weiten Bereich reproduziert (gestrichelte Linie). Lediglich an den scharfen Kanten treten Gibbs'sche Über- bzw. Unterschwinger auf.

Fall II: \cos^2 -Kurve

Die Störung verbreitert sich bei Verwendung von Gleichung 5.2 weiterhin (Abb. 5.1.b, gepunktete Linie) und weist, erkennbar in der Vergrößerung (Abb. 5.1.c), bei Gitterpunkt 60 eine leichte Abnahme des Maximums auf. Eine genaue Bestimmung dieses Maximalwertes ist jedoch eine Grundvoraussetzung zur Analyse der Kanalisierungsinstabilität.

Wird der Differenzenquotient zweiter Fehlerordnung benutzt (gestrichelte Linie), so bleibt die initiale Form der Störung fast perfekt erhalten. Lediglich rechts (Gitterpunkt 90) ist eine leichte Asymmetrie, ein Gibbs'scher Unterschwinger, zu erkennen. Diese Asymmetrie rührt daher, dass in diesem Bereich (Gitterpunkte um 90) die \cos^2 -Kurve nicht hinreichend glatt abgetastet ist (Abb. 5.1.d, durchgezogene Linie). Hierdurch ergeben sich in diesem Bereich leichte Knicke im Kurvenverlauf, wodurch sich, wie im Falle des Porositätssprunges, Gibbs'sche Überschwinger ausbilden. Eine weitere, nur schwer zu erkennende, Asymmetrie (Abb. 5.1.c), welche erst bei der späteren Verwendung des FDS zweiter Fehlerordnung beobachtet wurde, tritt bei Gitterpunkt 50 auf. Auf sie wird in Kapitel 6.5 näher eingegangen.

Ein Vergleich der Flächeninhalte der vier advektierten Geometrien mit dem des Initialfeldes zeigt, dass dieser konstant ist, demzufolge wird bei diesen einfachen Geometrien die Massenerhaltung nicht verletzt.

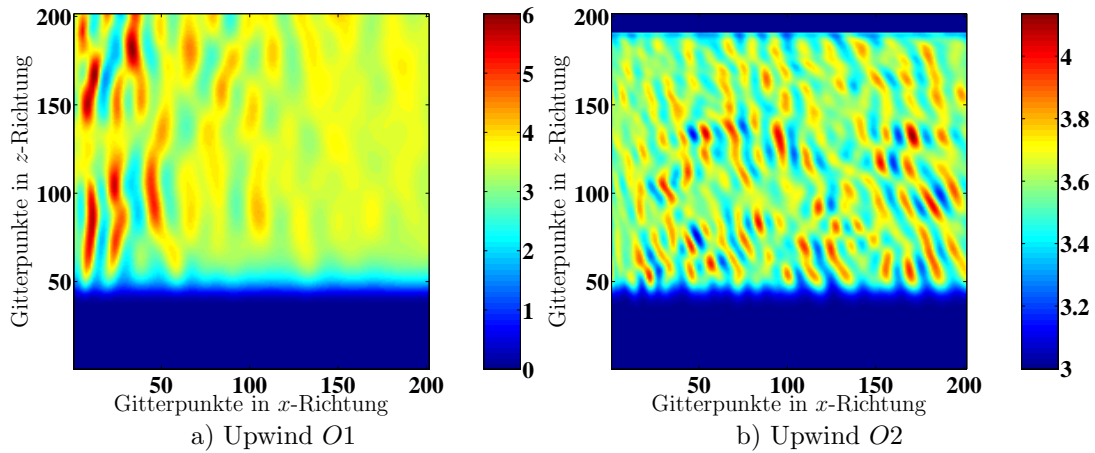


Abbildung 5.2. Beispiel der numerischen Diffusion an realen Porositätsverteilungen [%].

Auswirkung der Genauigkeit in realen Modellen

Als weiterführender Test wurde mit den vorherigen Parametern, jetzt jedoch unter der Dehnungsbedingung der Reinen Scherung, eine zufällige, geglättete Porositätsverteilung mit beiden Upwind-Verfahren geprüft. Das Upwind-Verfahren erster Fehlerordnung wurde bis zu einer Dehnung von $\varepsilon_{xx} = 0.2$ mit $\dot{\varepsilon} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ geschert (Abb. 5.2.a). Aufgrund von numerischen Gegebenheiten konnte das Upwind-Verfahren zweiter Fehlerordnung nicht unter den gleichen Scherbedingungen getestet werden. Anstelle der Reinen Scherung wurde eine Superpositionierung von Einfacher und Reiner Scherung gewählt, wobei Reine Scherung 80% der Scherung ausmacht. Das Experiment lief ebenfalls bis zu einer Dehnung von $\varepsilon_{xx} = 0.2$ mit $\dot{\varepsilon} = 2 \cdot 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ (Abb. 5.2.b).

Im Fall von Abbildung 5.2.a ist zu erkennen, dass die Kanäle, wie in der Theorie beschrieben, vertikal verlaufen. Die Kanäle von Abbildung 5.2.b weisen, aufgrund der Superpositionierung von 20% Einfacher und 80% Reiner Scherung, eine Auslenkung von ca. 10° auf. Weiterhin auffällig ist, dass sich die zu erkennende Wellenlänge der erzeugten Kanäle bei Verwendung des FDS zweiter Fehlerordnung leicht erhöht hat, sowie dass sich feinere Strukturen auflösen lassen. Diese Erhöhung bzw. das Auflösen feinerer Strukturen ist auf eine gitterabhängige, Wachstumsrate zurückzuführen (Kap. 6.2.1):

FDCON weist eine gitterabhängige ausgezeichnete Wachstumsrate auf, welche ebenfalls mit der Stärke der numerischen Diffusion korreliert. Je höher die numerische Diffusion ist, desto stärker werden große Wellenzahlen gedämpft, wodurch sich das Maximum der Wachstumsrate in Abbildung 6.3 zu kleineren Wellenzahlen verschiebt. Aus diesem Grund weist Abbildung 5.2.a eine niedrigere durchschnittliche Wellenzahl auf als Abbildung 5.2.b.

Generell ist eine Erhöhung der Genauigkeit sinnvoll, da hierdurch die numerische Diffusion verringert wird, allerdings sollte man sich auch über die Nachteile einer Erhöhung im Klaren sein (z. B. Gibbs'sche Überschwinger).

Die in der Natur vorkommenden Porositätsschwankungen weisen eher den Charakter der Testreihe 2 auf, wodurch die Verwendung des Upwind-Schemas zweiter Fehlerordnung gerechtfertigt ist.

In Kapitel 6.5 wird allerdings gezeigt, dass die Verwendung von Gleichung 5.3 weitreichendere Nachteile hat, als diese Voruntersuchung aufzeigen konnte. Dennoch konnte nur durch den Einsatz des genaueren Upwind-Verfahrens eine gute Auswertung der numerischen Ergebnisse erfolgen und somit die Kanalisierungsinstabilität unter geophysikalischen Aspekten untersucht werden.

5.2 Endliche Dehnung bei Einfacher Scherung

Im Falle Einfacher Scherung ist es prinzipiell möglich, bis zu einer beliebigen Dehnung zu rechnen. Hierzu sind allerdings periodische Randbedingungen am linken und rechten Rand nötig. Diesen Bedingungen konnte durch einfaches Aufprägen der Porositätswerte des rechten Randpunktes auf den linken Randpunkt in jedem Zeitschritt entsprochen werden.

Es ist anzumerken, dass jedoch eine genaue Implementierung der Randbedingungen erfolgen sollte. In dieser Arbeit war es aber möglich, die einfachere Methode des Aufprägens der Porositätswerte anzuwenden, da die Energieerhaltungsgleichung nicht gelöst wird, wodurch nur auf eine korrekte Übertragung des Porositätsfeldes zu achten war.

Weiterhin musste auf die Kontinuität der Geschwindigkeiten am Rand keine Rücksicht genommen werden, da diese durch die Methode der aufgeprägten Stromfunktion zu jedem Zeitschritt festgelegt werden. In Gottschaldt (1997) wird die genaue Implementierung für periodische Randbedingungen beschrieben.

5.3 Implementierung der Wassererhaltungsgleichung in FDCON

Die Implementierung der Erhaltungsgleichung für das Wasser in FDCON erfolgt durch ein „Upwind-Verfahren“. Zur Vereinfachung von Gleichung 4.1 wird zum einen der Term $-\varphi \kappa_{H_2O} \nabla c_f$ vernachlässigt, da in den hier betrachteten Prozessen die Diffusivität des Wassers viel kleiner ist als der thermische Diffusionskoeffizient ($\kappa_{H_2O} \ll \kappa$, $\kappa_{H_2O} \approx 10^{-10} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ (Watson, 1994), $\kappa = 10^{-6} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$, Kap. 2.1). Zum anderen wird der Wassergehalt der Matrix c_s über den Partitionskoeffizienten D durch den Wassergehalt der Schmelze ausgedrückt ($c_s = c_f D$). Hierdurch wird Gleichung 4.1 zu

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varphi c_f + (1 - \varphi) c_f D) = -\nabla \cdot (\varphi c_f \vec{u}_f + (1 - \varphi) c_f D \vec{u}_s) . \quad (5.5)$$

Für die Implementierung wird Gleichung 5.5 nach $\frac{\partial}{\partial t} c_f$ aufgelöst. Es folgt²

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} c_f}_{\text{termcst}} = - \underbrace{\frac{1}{\varphi(1-D) + D}}_{\text{Faktor1}} \left[c_f \left(\underbrace{\vec{u}_f \nabla \varphi}_2 + \underbrace{\varphi \nabla \cdot \vec{u}_f}_3 - \underbrace{D \vec{u}_s \nabla \varphi}_2 \right) + \nabla c_f \left(\underbrace{\varphi \vec{u}_f}_4 + \underbrace{D(1-\varphi) \vec{u}_s}_5 \right) + \underbrace{c_f(1-D) \frac{\partial}{\partial t} \varphi}_6 \right] . \quad (5.6)$$

Die Programmierung der einzelnen Terme wurde wie folgt durchgeführt:

²Diese Lösung beinhaltet die Anwendung der CBA, d.h. Terme, bei denen $\nabla \vec{u}_s$ vorkommt, wurden weggelassen (Schmeling, 2000, Glg. 15). Die Bezeichnungen bzw. Nummern der einzelnen Terme ordnen sie den nachfolgenden Erläuterungen ihrer Implementierung zu.

Term termcst

Die zeitliche Ableitung wird wie folgt gelöst

$$\frac{\partial}{\partial t} c_f = \frac{c_{fij}^{n+1} - c_{fij}^n}{\Delta t} = (\text{Faktor1}) [] \rightarrow c_{fij}^{n+1} = \Delta t (\text{Faktor1}) [] + c_{fij}^n. \quad (5.7)$$

(i, j) Gitterpunkt, n Zeitschritt

Term Faktor 1

Aufgrund von Gleichung 5.7 wird Δt mit diesem Term zusammengefasst

$$-\frac{\Delta t}{\varphi (1 - D) + D}. \quad (5.8)$$

Term 2

$$c_f (\langle \vec{u}_f \rangle - D \langle \vec{u}_s \rangle) \nabla \varphi = c_f \left(\frac{\varphi_+^n - \varphi_-^n}{2\Delta x} \tilde{u} + \frac{\varphi_\oplus^n - \varphi_\ominus^n}{2\Delta z} \tilde{w} \right) \quad (5.9)$$

$\tilde{u} = u_f - Du_s$, $\tilde{w} = w_f - Dw_s$, $+/-$ Gitterpunkt an der Stelle $(i+1, j)$ bzw. $(i-1, j)$, \oplus, \ominus Gitterpunkt an der Stelle $(i, j+1)$ bzw. $(i, j-1)$

Term 3

$$c_f \varphi \nabla \cdot \langle \vec{u}_f \rangle = c_f \varphi^n \left(\frac{u_+^f - u_-^f}{2\Delta x} + \frac{w_\oplus^f - w_\ominus^f}{2\Delta z} \right) \quad (5.10)$$

Term 4

In den Advektionstermen 4 und 5 treten örtliche Ableitungen des Wasserfeldes auf, dementsprechend werden sie nach einem „Upwind“-Verfahren programmiert.

Für die einseitigen Differenzenquotienten wird ein Finite-Differenzenquotienten-Schema zweiter Fehlerordnung (Glg. 5.3) verwendet. Die Notation bedeutet: v vorwärts, r rückwärts, x Ableitung in x -Richtung, z Ableitung in z -Richtung.

$$\varphi \langle \vec{u}_f \rangle \nabla c_f = \varphi^n \begin{cases} u^f c_{f rx ij} + w^f c_{f rz ij} & \text{für } u^f \geq 0 \text{ und } w^f \geq 0 \\ u^f c_{f vx ij} + w^f c_{f vz ij} & \text{für } u^f < 0 \text{ und } w^f < 0 \\ u^f c_{f rx ij} + w^f c_{f vz ij} & \text{für } u^f \geq 0 \text{ und } w^f < 0 \\ u^f c_{f vx ij} + w^f c_{f rz ij} & \text{für } u^f < 0 \text{ und } w^f \geq 0 \end{cases} \quad (5.11)$$

Term 5

$$D(1 - \varphi) \langle \vec{u}_s \rangle \nabla c_f = D(1 - \varphi^n) \begin{cases} u^s c_{f rx ij} + w^s c_{f rz ij} & \text{für } u^s \geq 0 \text{ und } w^s \geq 0 \\ u^s c_{f vx ij} + w^s c_{f vz ij} & \text{für } u^s < 0 \text{ und } w^s < 0 \\ u^s c_{f rx ij} + w^s c_{f vz ij} & \text{für } u^s \geq 0 \text{ und } w^s < 0 \\ u^s c_{f vx ij} + w^s c_{f rz ij} & \text{für } u^s < 0 \text{ und } w^s \geq 0 \end{cases} \quad (5.12)$$

Term 6

$$c_f(1 - D) \frac{\partial}{\partial t} \varphi = \frac{c_f(1 - D)(\varphi_j^{n+1} - \varphi_j^n)}{\Delta t} \quad (5.13)$$

Der Einfluss des Wasserfeldes auf die Rheologie wird wie in Kapitel 2.6 berücksichtigt.

Numerische Tests dieser Implementierung zeigen, dass der Wasserhaushalt für gut aufgelöste Strukturen erfolgreich berechnet und transportiert werden kann.

Zur technischen Realisierung in FDCON ist anzumerken, dass sich, wenn die Porositätsstrukturen zu klein sind und demzufolge zu starke Porositätssprünge auftreten, bevorzugt Gibbs'sche Überschwinger ausbilden, diese nach einer gewissen Zeit extrem anwachsen und so einen störenden Einfluss auf das Verhalten des Wassers ausüben. Um diesen Effekt auszugleichen, ist in FDCON nicht das Wasserfeld der Matrix programmiert, sondern das der Schmelze. Hierdurch werden die Gibbs'schen Überschwinger in Gibbs'sche Unterschwinger transformiert, welche sich wesentlich einfacher bei der Implementierung handhaben lassen³.

³Da die minimale Porosität bei 0% liegt, werden die Unterschwinger entsprechend abgeschnitten.

6.1 Bestimmung der Wachstumsrate aus den numerischen Ergebnissen

Allgemein gilt für das zeitliche Anwachsen der Perturbation (Kap. C.6)

$$\delta\varphi(t) = \varphi_{max}(t) - \varphi_0 = \delta\varphi_0 e^{\alpha_{num} t}. \quad (6.1)$$

Gleichung 6.1 kann in eine Geradengleichung der Form¹ $y(t) = mt + b$ umgewandelt werden

$$\ln\delta\varphi(t) = \ln(\varphi_{max}(t) - \varphi_0) = \alpha_{num} t + \ln\delta\varphi_0. \quad (6.2)$$

Die Wachstumsrate α_{num} kann nunmehr durch eine lineare Regression des $\ln\delta\varphi(t)$ bezüglich t bestimmt werden.

Die Bestimmung von $\varphi_{max}(t)$ erfolgt für jeden Zeitschritt in einer Box, die, bei der in dieser Arbeit vorwiegend verwendeten Gitterauflösung des Porositätsfeldes von 201×201 Gitterpunkten, 40 Gitterpunkte von jedem Rand entfernt zentriert im Rechengebiet liegt.

Diese Beschränkung dient der Minimierung störender Einflüsse der Ränder. Weiterhin werden die Gitterkoordinaten von $\varphi_{max}(t)$ ermittelt und für eine spätere Auswertung bereitgehalten. In Abbildung 6.1 sind der zeitliche Verlauf der Porosität sowie die Position von $\varphi_{max}(t)$ exemplarisch für zwei unterschiedliche Versuchsreihen dargestellt. Optimal verläuft die Porositätskurve glatt (Abb. 6.1.a) und die x - und z -Positionen fluktuieren nur wenig um einen Wert (Abb. 6.1.c). In einigen Fällen ist der optimale Verlauf durch hochfrequente Sprünge gestört (Abb. 6.1.b). Abbildung 6.1.d zeigt, dass jeder dieser Sprünge mit einem deutlichen Versatz in der x - und z -Position korreliert. Diese Sprünge können auf eine nicht ausreichende Gitterauflösung und damit auf unterschiedlich starke numerische Diffusionen

¹ m Steigung, b y-Achsenabschnitt

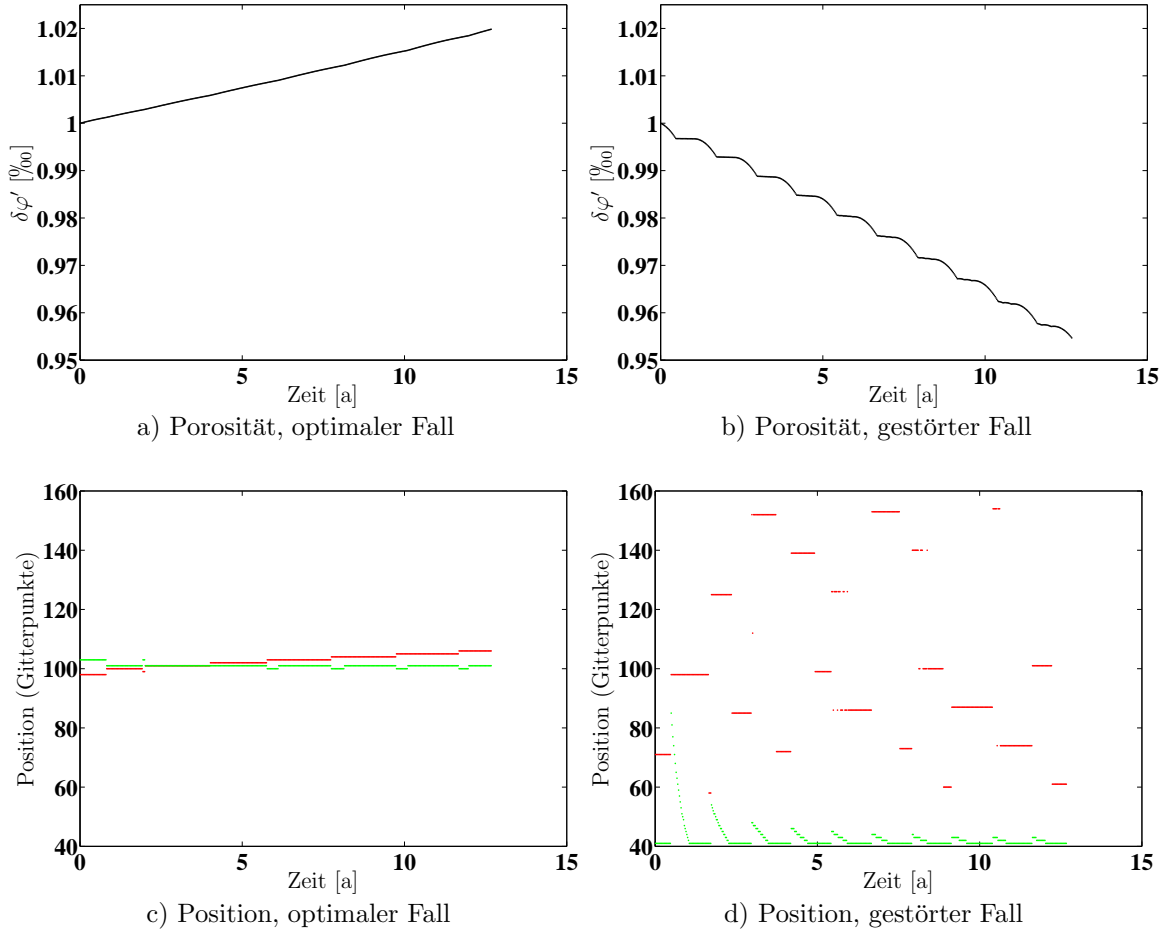


Abbildung 6.1. Beispiel zweier Porositäts-Positions-Kurven.

Oben: $\delta\varphi'(t) = 1000(\delta\varphi(t) - \varphi_0)$ mit $\varphi_0 = 3\%$

Unten: — x -Position; — z -Position.

zurückgeführt werden:

Im unteren Bereich herrscht, bedingt durch die geringeren Advektionsgeschwindigkeiten \vec{u} , eine kleinere numerische Diffusion \mathcal{U} als im oberen Bereich, weshalb tiefer liegende Perturbationen eine größere Wachstumsrate α aufweisen und damit schneller anwachsen können als höher liegende

$$\vec{u}_{oben} > \vec{u}_{unten} \Rightarrow \mathcal{U}_{oben} > \mathcal{U}_{unten} \Rightarrow \alpha_{oben} < \alpha_{unten} \Rightarrow \varphi_{oben} < \varphi_{unten}. \quad (6.3)$$

Die Advektion der Matrix erfolgt so langsam, dass mehrere Zeitschritte benötigt werden, um den gesamten Schmelzanteil einer Gitterzelle (Startzelle) in die benachbarte Zelle (Zielzelle) zu verlagern. Diese langsame Verlagerung der Schmelze hat zur Folge, dass die Porosität der Startzelle mit der Zeit abnimmt ($\varphi_{start}(t) \searrow$), während die Porosität der Zielzelle langsam zunimmt ($\varphi_{ziel}(t) \nearrow$). Dadurch weist die Startzelle trotz des Schmelzverlustes immer noch die maximale Porosität auf, weswegen die x -Koordinate über mehrere Zeitschritte konstant bleibt ($t < t_{kri}$). Nach hinlänglicher Schmelzübertragung (t_{kri}) an die Zielzelle springt die x -Koordinate auf deren Position ($t > t_{kri}$).

$$\begin{array}{llllll} \varphi_{start}(t) \searrow & > & \varphi_{ziel}(t) \nearrow & t < t_{kri} & \Rightarrow & x_{start} \\ \varphi_{start}(t) \searrow & < & \varphi_{ziel}(t) \nearrow & t > t_{kri} & \Rightarrow & x_{ziel} \end{array} \quad (6.4)$$

Da mehrere Schwingungen der sinusförmigen Störung im Messgebiet liegen, kann es nun aus numerischen Gründen vorkommen, dass der Schmelzfluss einer anderen Schwingung das alte Maximum früher ablöst, folglich dieses dann die Führungsposition übernimmt, was zu großen Sprüngen in der x -Position führt (rote gestrichelte Linie, Abb. 6.1.d).

Das extreme Abfallen der z -Position kann ebenfalls durch die unterschiedliche numerische Diffusion erklärt werden. Zwei Gitterzellen, die direkt übereinander liegen, weisen leicht unterschiedliche numerische Diffusionen auf (je höher ein Gitterpunkt liegt, desto größer ist diese). Entsprechend wird hierdurch der Porositätswert des höher liegenden Gitterpunktes stärker abgeschwächt, als der des darunter liegenden. Dies hat nun wiederum zur Folge, dass die Position des Maximums stetig absinkt.

Da es sich bei diesen Sprüngen, im Gegensatz zum physikalischen Anwachsen der Porositätsstörung, um ein verhältnismäßig hochfrequentes Signal handelt, kann die lineare Regression zur Bestimmung der Steigung mit den Rohdaten dennoch durchgeführt werden, wenn über hinreichend viele Sprünge gemittelt wird. Der Nulldurchgang der Rekursionsgeraden wird zwar im Gegensatz zu dem einer Rekursionsgeraden, welche aus „glatten“ Rohdaten bestimmt worden wäre, verschoben, die Steigungen dieser beiden Kurven unter-

scheiden sich jedoch nur gering voneinander. Vergleiche der numerisch ermittelten Wachstumsraten mit denen der analytischen Lösung zeigen keine signifikanten Abweichungen. Dieses Auswerteverfahren kann demnach genutzt werden.

Der relative Fehler der durch dieses Auswerteverfahren bestimmten Wachstumsrate unter Berücksichtigung der Fehlerkurven beläuft sich auf ca. $\pm 6\%$ (Kap. 6.5). Werden jedoch nur niederfrequente Signale ($k' \leq 5$) analysiert, so liegt der Fehler niedriger. Weiterhin zeigt sich, dass die theoretische Wachstumsrate bei einer Variation ihrer Parameter (η_0 , η_f , a_1 und h) um $\pm 5\%$ in einem Wellenzahlenbereich $k'_{rheo} \ll 1$ einen Fehler von $\pm 10\%$ aufweist, wobei dieser Fehler bei zunehmendem k'_{rheo} immer kleiner wird, bis bei $k'_{rheo} \gg 1$ dieser Fehler auf $\pm \frac{2\eta_{s0}}{\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}} a_1 \cdot 5\%$ abgefallen ist. Da die Experimente vorwiegend in einem Wellenzahlbereich $k'_{rheo} \approx 1$ durchgeführt wurden, beläuft sich der gesamte relative Fehler auf $\pm 6\%$.

Wie auch in Kapitel 3, wird die numerisch bestimmte Wachstumsrate α_{num} mit der Dehnungsrate $\dot{\epsilon}$ normiert

$$\alpha'_{num} = \frac{\alpha_{num}}{\dot{\epsilon}}. \quad (6.5)$$

6.2 Reproduziert FDCON die analytische Wachstumsrate?

Ist FDCON durch die Verbesserung der Genauigkeit in der Lage, die analytische Wachstumsrate α'_{CBA} (Glg. 3.9) einer 1D sinusförmigen Perturbation, wie sie für die lineare Stabilitätsanalyse benutzt wird, zu reproduzieren?

Für eine senkrecht zur maximalen Kompressionsspannung verlaufende, eindimensionale sinusförmige Störung (1D Sinus) ist die Wachstumsrate maximal. Dementsprechend muss im Falle Einfacher Scherung die Störung, um optimal verstärkt zu werden, um 45° ausgelenkt werden (Abb. 6.6.a). Der Sinus weist eine Porositätsperturbation von $\delta\varphi = \pm 0.1\%$ bei einer Hintergrundporosität von $\varphi = 3.0\%$ sowie eine Wellenzahl von $k'_{mckcba} = 0.21$ auf. Die numerischen Gitter dieser Untersuchung betragen für das grobe 101×101 Gitterpunkte

und 201×201 Gitterpunkte für das feine bei einer Modellboxgröße des Referenzmodells von $h \times h = 1000 \times 1000 \text{ m}^2$.

Aufgrund von numerischen Grenzen sind keine höheren Gitterauflösungen als die beschriebenen vertretbar. Hierdurch ergibt sich das Problem, dass keine größeren Wellenzahlen als $k'_{mckcba} = 0.29$ simuliert werden können (Kap. 6.3). Werden jedoch bei konstant gehaltener Dehnungsrate die Modellboxdimensionen verkleinert, können Wellenzahlen $k'_{mckcba} > 0.29$ berechnet werden. Durch die in Kapitel 2.9 eingeführte Nichtdimensionierung ergibt sich, da die Dehnungsrate konstant bleiben soll, ebenfalls eine konstante, nicht dimensionierte Vertikalgeschwindigkeit $u'_{x,z_{max}} = \text{konst.}$ am oberen Rand der Modellbox. Da $Rtn(h) \sim h^2$ ist, die Versuche jedoch dieselben fluiddynamischen Eigenschaften aufweisen sollen, reduziert sich Rtn bei abnehmendem h . Durch die quadratische Abhängigkeit $Rtns$ von h ergibt sich aus Stabilitätsgründen, dass die Modellbox höchstens auf $h \times h = 62.5 \times 62.5 \text{ m}^2$ reduziert werden kann. Da diese Versuchsreihe ohne Auftrieb ($AZ = 0$) simuliert wird, ergeben sich bei der Aufstiegszahl durch eine Verkleinerung der Modellbox keine Veränderungen.

Weiterhin werden in der Box mehrere Wellenzüge betrachtet, um Randeffekte auszuschließen. Ausgehend von den Parametern des Referenzmodells² und einer Dehnungsrate von $\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}_0 = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ ergeben sich für die weiteren Modelle die in Tabelle 6.1 aufgelisteten Parameterkombinationen. Um diese Testreihe abzurunden, wurden außerdem die in Kapitel 2.6 beschriebenen Rheologien getestet, sowie die Implementierung der Erhaltungsgleichung des Wassers (Kap. 4) geprüft.

Die Ergebnisse dieser Testreihe sind in Abbildung 6.2 dargestellt. Die durchgezogenen Linien stellen die berechneten theoretischen Wachstumsraten α' ohne die CBA dar, während die gestrichelten Linien die berechneten theoretischen Wachstumsraten α'_{CBA} unter Berücksichtigung der CBA zeigen.

In diesem Kapitel wird nur auf die Ergebnisse dieses Versuches eingegangen. Eine Analyse des Kurvenverlaufs der Kanalisierungsinstabilität ist in Kapitel 3 zu finden. Auf den Effekt von Wasser wird in Kapitel 4.2 näher eingegangen.

²($h = 1000$), $Rtn = 0.5$ mit $a = 0.001 \text{ m}$, $b = 648$, $\eta_0 = 10^{15} \text{ Pa s}$, $\eta_f = 0.77 \text{ Pa s}$, $AZ = 0$

u'	h [m]	Rtn	k [m]	k'_{rheo}	$\delta_{c,rheo}$ [m]	Rheologie
2	62.5	$1.95 \cdot 10^{-3}$	0.703	3.37	4.8	<i>mckcba</i>
2	71.4	$2.55 \cdot 10^{-3}$	0.615	2.95	4.8	<i>mckcba</i>
2	100.0	$5.0 \cdot 10^{-3}$	0.439	2.07	4.8	<i>mckcba</i>
2	125.0	$7.8 \cdot 10^{-3}$	0.351	1.68, 3.02, 4.60	4.8, 8.6, 13.1	<i>mckcba, schmcba, konstcba</i>
2	142.8	$1.02 \cdot 10^{-2}$	0.307	1.47	4.8	<i>mckcba</i>
2	166.6	$1.38 \cdot 10^{-2}$	0.263	1.29	4.8	<i>mckcba</i>
2	200.0	$2.0 \cdot 10^{-2}$	0.219	1.01	4.8	<i>mckcba</i>
2	250.0	$3.12 \cdot 10^{-2}$	0.175	0.84	4.8	<i>mckcba</i>
2	333.3	$5.5 \cdot 10^{-2}$	0.131	0.63, 1.12, 1.72	4.8, 8.6, 13.1	<i>mckcba, schmcba, konstcba</i>
2	500.0	0.12	0.088	0.42	4.8	<i>mckcba</i>
2	769.2	0.29	0.057	0.26	4.8	<i>mckcba</i>
2	1000.0	0.5	0.044	0.21, 0.36, 0.56	4.8, 8.6, 13.1	<i>mckcba, schmcba, konstcba</i>
2	1250.0	0.78	0.035	0.14	4.8	<i>mckcba</i>
2	1500.0	1.12	0.029	0.13	4.8	<i>mckcba</i>
2	1750.0	1.53	0.025	0.11	4.8	<i>mckcba</i>
2	2000.0	2.0	0.022	0.10	4.8	<i>mckcba</i>
2	2500.0	3.12	0.017	0.07	4.8	<i>mckcba</i>
2	3000.0	4.5	0.014	0.06, 0.12, 0.18	4.8, 8.6, 13.1	<i>mckcba, schmcba, konstcba</i>

Tabelle 6.1. Untersuchungsparameter der Versuchsreihe:

Reproduziert FDCON die analytische Wachstumsrate?

Nomenklatur der Rheologien:

mck Viskositätsgesetz McKenzie (Glg 2.22)*schm* Viskositätsgesetz Schmeling (Glg 2.24)*konst* Viskositätsgesetz $\eta_b(\varphi) = konst.$ *h* dem Experiment lag eine wasserhaltige Matrix zugrunde

Es ist deutlich zu erkennen, dass FDCON für alle Rheologien die theoretische Wachstumsrate α'_{CBA} sehr gut reproduziert. Somit ist FDCON für die wissenschaftliche Untersuchung der Kanalisierungsinstabilität geeignet.

Der reduzierende Effekt des Wassers auf die Wachstumsrate wird in Abbildung 6.2.a deutlich. Wird eine von den Rheologien unabhängige Skalierung für alle Kurven verwendet - in diesem Fall wurden alle Kurven mit $\delta_{c,mck}$ normiert - liegen für kleine Wellenzahlen die wasserhaltigen Kurven (blau) unterhalb der entsprechenden Kurven der trockenen Rheologie (rot). Diese Verschiebung liegt darin begründet, dass eine wasserunabhängige

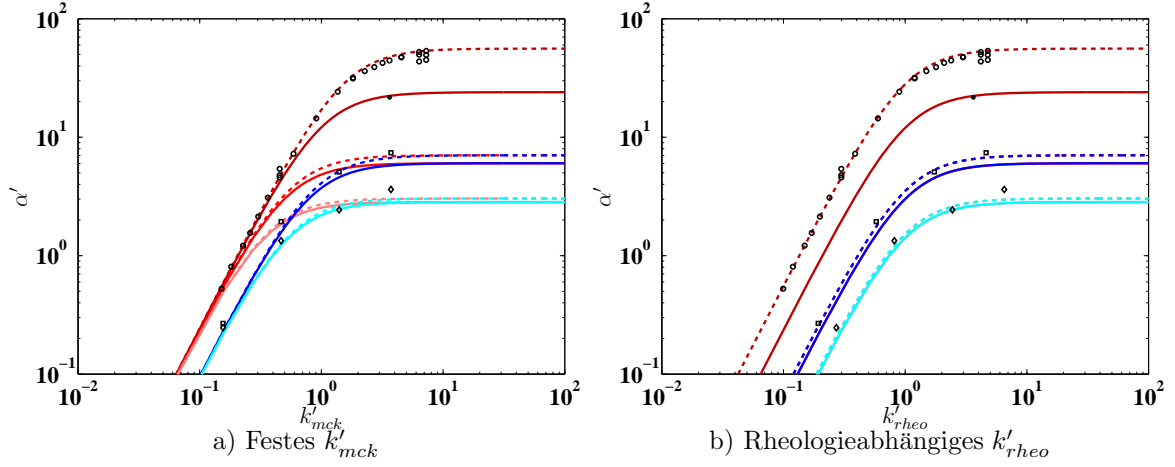


Abbildung 6.2. Normierte Wachstumsrate α' zu verschiedenen Wellenzahlen k'_{rheo} und Rheologien

- $\eta_b = \eta_s$ trocken $\delta_{c,mck} = 7.3$ m (McKenzie 1984)
- - $\eta_b = \eta_s$ trocken CBA $\delta_{c,mckcba} = 4.8$ m (McKenzie 1984)
- $\eta_b(\varphi, c_1, c_2, \text{spezial})$ trocken $\delta_{c,spezial} = 14.7$ m, nass $\delta_{c,spezial} = 9.3$ m
- - $\eta_b(\varphi, c_1, c_2, \text{spezial})$ trocken $\delta_{c,spezcba} = 13.6$ m, nass $\delta_{c,spezcba} = 8.6$ m CBA
- $\eta_b(\varphi, c_1, c_2, \text{intrin.})$ trocken $\delta_{c,schm} = 21.4$ m, nass $\delta_{c,schm} = 13.5$ m (Schmeling 2000)
- - $\eta_b(\varphi, c_1, c_2, \text{intrin.})$ trocken $\delta_{c,schmcba} = 20.7$ m, nass $\delta_{c,schmcba} = 13.1$ m, CBA (Schmeling 2000)
- Experimente $\eta_b = \eta_s$ trocken CBA SS
- Experimente $\eta_b = \text{konst.}$ trocken SS
- ◇ Experimente $\eta_b(\varphi, c_1, c_2, \text{intrin.})$ nass CBA SS
- Experimente $\eta_b(\varphi, c_1, c_2, \text{spezial})$ nass CBA SS

Die Rheologie $\eta_b(\varphi, c_1, c_2, \text{spezial})$ ist eine zu Testzwecken eingeführte Rheologie, welche in Glg. 2.24 der effektiven Volumenviskosität anstelle der intrinsischen Matrixviskosität die effektive Scherviskosität η_s verwendet.

Sie wurde nur im Rahmen dieses Kapitels verwendet, um FDCON zu testen und findet in der weiteren Arbeit keine Anwendung.

Schmelz-Retentionzahl Rtn verwendet wurde (Glg. 2.32), d.h. die Skalierungviskosität η_0 nicht vom Wasser beeinflusst wird.

Wird hingegen ein wasserabhängiges η_0 zugelassen, sowie, um vergleichbare fluiddynamische Verhältnisse zu gewährleisten, $Rtn = \text{konst.}$ gefordert, führt dies dazu, dass sich die Schmelzviskosität η_f in Rtn gleichermaßen mit η_0 ändert und hierdurch der Effekt von

Wasser kompensiert wird. Unter der weiteren Berücksichtigung der der Rheologie entsprechenden Kompaktionslänge für die Normierung von k , hat dies zur Folge, dass die nassen und trockenen Kurven deckungsgleich verlaufen (Abb. 6.2.b).

Außerdem ist ersichtlich, dass die Rheologie für die Volumenviskosität von McKenzie (Glg. 2.22) die stärkste Wachstumsrate erzeugt.

6.2.1 Variation des Kohlstedt Faktors a_1

In der Theorie der Kanalisierungsinstabilität wurde gezeigt, dass die Wachstumsrate für große Wellenzahlen in der Größenordnung der exponentiellen Konstanten a_1 liegt. In dieser Vorstudie wird untersucht, ob FDCON bei einer kleinen, konstant gehaltenen Wellenzahl und einer Variation von a_1 ebenfalls die Theorie reproduziert. Für diese Experimente wurde eine Wellenzahl von $k'_{mckcba} = 0.15$ und eine Dehnungsrate von $\dot{\epsilon} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ (Einfache Scherung) gewählt. Wie im vorherigen Kapitel wurde auch hier ein um 45° geneigter Sinus bei einer Hintergrundporosität von 3% und einer initialen Porositätsperturbation von $\pm 0.1\%$ untersucht. Da in Kapitel 6.2 gezeigt wurde, dass FDCON alle Rheologien gut anpasst, wird hier nur die Rheologie von McKenzie (Glg. 2.22) untersucht, da bei dieser die Effekte der Kanalisierungsinstabilität am größten sind.

In Abbildung 6.3 ist das Ergebnis dieser Untersuchung dargestellt. Es ist deutlich erkennbar, dass FDCON auch bei einer Variation von a_1 die Theorie ebenfalls sehr gut wiedergibt. Die Variation von a_1 bei konstanter Wellenzahl führt zu einem absoluten Maximum (Abb. 6.3, $a_1 \sim 30$).

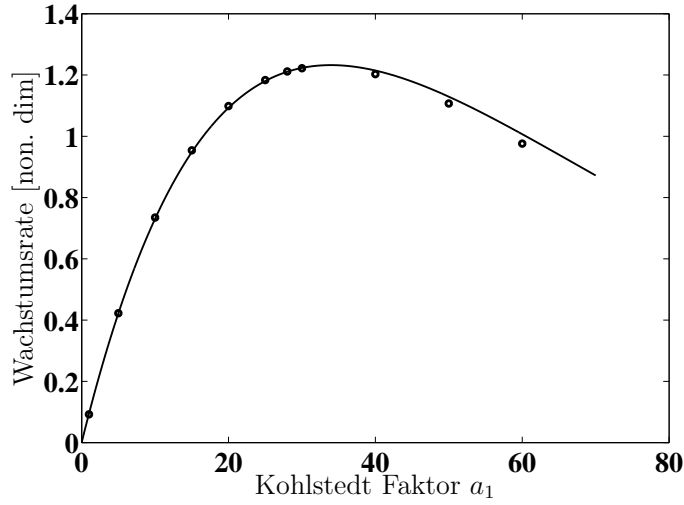


Abbildung 6.3. Die Wachstumsrate α' in Abhängigkeit von a_1 bei einer konstanten Wellenzahl ($k'_{mckcba} = 0.15$)

— Theoretische Werte, \circ : Experimente

Für den Kurvenverlauf in Abbildung 6.3 gilt nach Gleichung 3.8 für eine konstante Wellenzahl und einen variablen Kohlstedtfaktor a_1 unter Berücksichtigung der Rheologie von McKenzie $\eta_b = \eta_s$

$$\alpha'(a_1, k = \text{konst.}) = \frac{b_1 a_1 \eta_{s0}}{1 + b_2 \eta_{s0}} = \frac{b_3 a_1}{\left(1 + \frac{1}{b_2 \eta_{s0}}\right)} = \frac{b_3 a_1}{\left(1 + \frac{1}{b_2 \eta_0} e^{a_1 \varphi_0}\right)} \quad (6.6)$$

$$\alpha'(a_1 \gg 1, k = \text{konst.}) \approx \frac{b_2 b_3 a_1 \eta_0}{e^{a_1 \varphi_0}}. \quad (6.7)$$

$$b_1 = 2(1 - \varphi_0) \frac{k_\varphi}{\eta_f} k^2, \quad b_2 = \frac{7}{3} \frac{k_\varphi}{\eta_f} k^2, \quad b_3 = \frac{6}{7} (1 - \varphi_0)$$

Anhand Gleichung 6.6 ist für die Rheologie nach McKenzie (Glg. 2.22) erkennbar, dass für kleine a_1 der Zähler dominiert, während für größere a_1 der Nenner, und damit die für die Scherviskosität verwendete Rheologie, zusehends an Bedeutung gewinnt. Entgegen der Intuition wirkt sich eine zu weiche Matrix (Abfall der Scherviskosität) negativ auf das Wachstum der Kanäle aus.

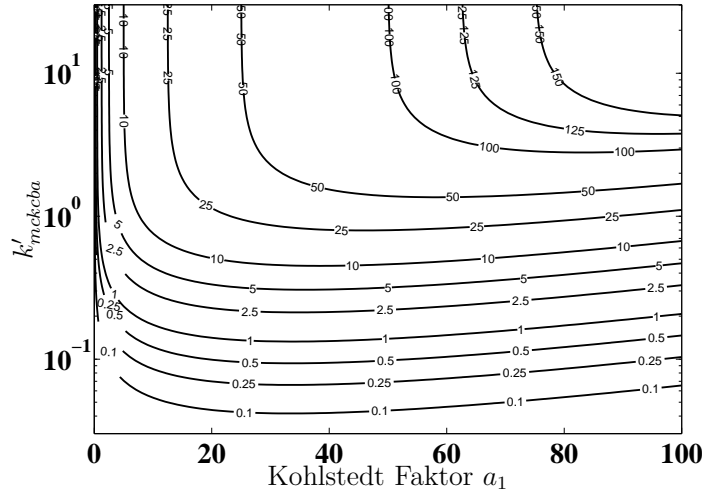


Abbildung 6.4. Die normierte Wachstumsrate α' (Isolinien) in Abhängigkeit von a_1 und k'_{mckcba} .

Wird hingegen eine andere Rheologie verwendet, verändern sich nur die Vorfaktoren b_1 bis b_3 , jedoch bleibt die generelle Abhängigkeit $b_3 a_1 \left(1 + \frac{1}{b_2 \eta_0} e^{a_1 \varphi_0}\right)^{-1}$ erhalten.

In der Literatur schwankt der Wert von a_1 zwischen 26 – 45. Kohlstedt *et al.* (2000) bestimmten a_1 durch Deformationsexperimente im Labor an trockenen und wasserhaltigen, synthetisch hergestellten Mantelgesteinen zu $a_1 = 28$. Dies korrigiert den von Kelemen *et al.* (1997) vorgeschlagenen Wert von $a_1 = 45$, der aus einer Anpassung der effektiven Viskosität bei Dislokations- und Kriechexperimenten resultiert, etwas nach unten. Neuere Laborexperimente an partiell geschmolzenen, wasserhaltigen Olivin-Basalt Aggregaten ($2\% \leq \varphi \leq 12\%$) von Mei *et al.* (2002) liefern für Diffusionskriechen $a_1 \approx 26$ und für Dislokationskriechen $a_1 \approx 31$.

Aufgrund dieser breiten Variation von a_1 stellt sich die Frage, welches a_1 für eine Studie der Kanalisierungsinstabilität gewählt werden sollte. Um Näheres über die Abhängigkeit der Wachstumsrate α von a_1 und k'_{mckcba} zu erfahren, ist diese in Abbildung 6.4 dargestellt. Deutlich zeigt sich für fast alle dargestellten Wellenzahlen eine sehr starke Variation der Wachstumsrate mit a_1 bis zu einem Wert von $a_1 \approx 15$. Hingegen ändert sie sich ab einem

$a_1 > 20$ für $k'_{mckcba} \leq 1$ nur sehr schwach als Funktion von a_1 (die Konturlinien verlaufen fast parallel zur a_1 -Achse). Ab $a_1 \approx 50$ fällt α wieder leicht ab.

Der in der Literatur angegebene Bereich von $26 \leq a_1 \leq 45$ liegt bei den von FDCON erfassbaren Wellenzahlen $k'_{mckcba} \leq 0.36$ genau auf dem Maximum der Wachstumsrate. Demzufolge kann ein beliebiges a_1 aus diesem Bereich gewählt werden. In dieser Arbeit wird der von Kohlstedt *et al.* (2000) vorgeschlagene Wert $a_1 = 28$ verwendet, da dieser sowohl für trockene als auch für wasserhaltige Regime gilt.

Interessanterweise ergeben sich für die zwei Kohlstedt Faktoren von Kelemen *et al.* (1997) ($a_1 = 45$) und Mei *et al.* (2002) ($a_1 = 26$) gleich große Wachstumsraten für $k'_{mckcba} \leq 1$. Sollten die Experimente von Kelemen *et al.* und Mei *et al.* unterhalb von $k'_{mckcba} \leq 1$ abgelaufen sein³, dann könnte davon ausgegangen werden, dass Kelemen *et al.* links des Maximalwertes der Wachstumsrate liegt und Mei *et al.* rechts davon, wodurch vermutet werden kann, dass beide Parteien, obwohl unterschiedliche Werte für a_1 gefunden wurden, dieselben physikalischen Prozesse beobachtet haben könnten.

6.3 Parameterstudie: Auflösung des FDCON-Gitters

Weiterhin ist zu klären, bis zu welcher Wellenzahl k'_{rheo} das in FDCON verwendete Gitter eine Störung auflöst. FDCON ist ein Finite-Differenzen Code, der für einzelne physikalische Größen zwei unterschiedliche Gitterauflösungen verwendet. So wird z.B. die Viskosität auf einem groben Gitter gerechnet, während die Porosität auf einem feinen Gitter diskretisiert ist. Das Gitter in FDCON wird durch die beiden Größen nx und nz angegeben, die Verfeinerung wird durch die Konstante $itres$ beschrieben. Die Anzahl der feinen Gitterpunkte hängt mit der Anzahl der groben Gitterpunkte wie folgt zusammen

$$nxt = itres (nx - 1) + 1 \qquad nzt = itres (nz - 1) + 1. \qquad (6.8)$$

³Diese Vermutung kann nur durch eine Bestimmung der Kompaktionslänge bestätigt werden, diese ist aber aus den beiden Veröffentlichungen nicht eindeutig bestimmbar.

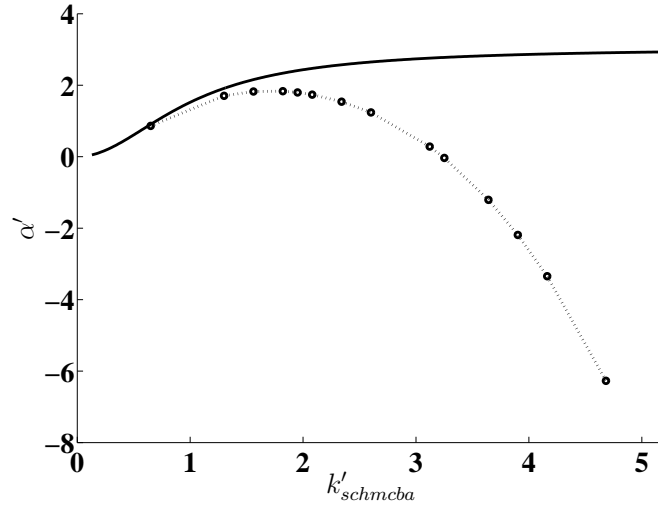


Abbildung 6.5. Studie zur Auflösung des FDCON-Gitters.

— Theorie -o- FDCON

In dieser Arbeit beträgt die Gitterauflösung vorwiegend $nx = nz = 101$ und $itres = 2$.

Die Auflösung des Gitters kann bei gleichbleibendem Gitter durch den Vergleich der Wachstumsrate eines immer hochfrequenten Sinus mit der theoretischen Wachstumsrate getestet werden.

Wie in den vorherigen Vorstudien wird wiederum ein um 45° ausgelenkter Sinus verwendet. Die Wellenzahl variiert in einem Bereich von $k'_{schmcb} = 0.65 - 4.68$. Die weiteren Parameter dieser Studie sind: $u' = 200$, $AZ = 0$, Rheologie von Schmeling (Glg. 2.24), $\varphi_0 = 3.0\%$, $\delta\varphi = 0.1\%$, Spannungszustand: Einfache Scherung.

Abbildung 6.5 zeigt die Ergebnisse der Experimente.

Die durchgezogene Linie spiegelt die theoretische Wachstumsrate α'_{CBA} wider, während die gestrichelte Linie die von FDCON erzeugte Wachstumsrate α'_{FDCON} darstellt. Deutlich ist der Abfall von α'_{FDCON} ab einer Wellenzahl von $k'_{schmcb} \approx 1.5$ zu erkennen. Dieser Abfall rührt von der mangelnden Gitterauflösung ab dieser Wellenzahl her. Hierdurch wird dem System eine Art Bandpassfilter aufgeprägt. Bei kleinen Wellenzahlen ist die Kanalisierungsinstabilität unwirksam, bei großen Wellenzahlen ist das Wachstum durch das Gitter

bestimmt. Dieser Bandpassfilter ist in den Versuchen mit der zufälligen Schmelzverteilung deutlich zu erkennen, da sich bei diesen stets Strukturen mit einer Wellenzahl von $k'_{schmcb} \approx 1.5$ ausbilden (Abb. 6.26.f, S. 111). Auf dieses Verhalten von FDCON wird in Kapitel 6.8 näher eingegangen.

Das Problem, dass die sich maximal verstärkende Wellenzahl von der Gitterauflösung abhängt, beobachtet auch Richardson (1998). Dieses Phänomen hängt damit zusammen, dass die Theorie für wachsende Wellenzahlen eine konstante Wachstumsrate vorhersagt, die Gitterauflösung allerdings aus technischen Gründen nicht beliebig mitwachsen kann (eine Verdoppelung des Gitters führt zu einer Vervierfachung des Speicherbedarfs und zu erheblich längeren Rechenzeiten).

Eine Möglichkeit, dieses Problem in den Griff zu bekommen, ist, wie in Kapitel 6.2 aufgezeigt, nicht die Wellenzahl zu verkleinern, sondern die Dimensionen der Messbox zu verringern. Allerdings sind dem ebenfalls Grenzen gesetzt, da eine Verkleinerung der Messbox, je nach Normierung, eine gleichzeitige Verkleinerung der fluiddynamischen Parameter (Rtn , AZ , u' , $\dot{\epsilon}_0$) erfordert und diese ebenfalls nicht beliebig klein gewählt werden können (eine Halbierung der Messbox führt z. B. zu einer Viertelung von Rtn , Tabelle 6.1, S. 72). So liegen die Grenzen von FDCON aus Stabilitätsgründen bei einer Modellboxgröße von $h \times h \approx 63 \times 63 \text{ m}^2$ bei einer Gitterauflösung von $nx = nz = 101$ und $itres = 2$.

Dass FDCON instabil wird, liegt hauptsächlich daran, dass Rtn zu klein wird. Ein noch zu vertretendes Rtn ist mit $\eta_f = 0.77 \text{ Pa s}$, $\eta_0 = 10^{15}$, $b = 648$ und $a = 0.01 \text{ m}$ gegeben durch $Rtn \approx 2.0 \cdot 10^{-3}$.

6.4 Initiale Porositätsfelder

Die vorangegangenen Untersuchungen wurden mit einem um 45° ausgelenkten Sinus und unterschiedlichen Wellenzahlen durchgeführt. Im Laufe dieser Arbeit wurden noch weitere initiale Geometrien auf ihr Verhalten bezüglich der Kanalisierungsinstabilität untersucht. Die verschiedenen Geometrien sind in Abbildung 6.6.a - 6.6.e dargestellt. Es handelt sich

hierbei um den bekannten 1D Sinus, sowie die neuen Geometrien:

eine 1D Ellipse, eine Ellipse und eine zufällige Porositätsverteilung. Diese Strukturen wurden alle mit einem Längen- zu Breitenverhältnis des Rechengebietes von 1 : 1 untersucht, zusätzlich dazu wurde die zufällige Porositätsverteilung auch an einem Rechengebiet mit einem Verhältnis von 1 : 8 analysiert.

Die Geometrien wurden, mit Ausnahme der zufälligen Verteilungen, unter verschiedenen Winkeln bezüglich der Vertikalen ausgelenkt. Die Winkelbezeichnung ist so gewählt, dass 0° die Vertikale repräsentiert und die Winkel entgegen dem Uhrzeigersinn anwachsen⁴.

Es wurden die Winkel $90^\circ, 70^\circ, 45^\circ, 20^\circ, 0^\circ, -20^\circ, -45^\circ, -70^\circ$ untersucht. Bedingt durch die Symmetrie der Geometrien bzgl. der x -Achse ist eine Untersuchung von Winkeln größer als $\pm 90^\circ$ nicht nötig. Weiterhin weisen die Geometrien in der Regel eine Hintergrundporosität von 3.0% auf. Die verwendeten Perturbationen variieren zwischen $\pm 0.1\%$ und $\pm 1.0\%$ für den 1D Sinus und $+0.1\%$ und $+1.0\%$ für die restlichen Geometrien. Die zufällige Porositätsverteilung weist entweder ein reines weißes oder ein tiefpassgefiltertes weißes Rauschen (rotes Rauschen) auf. Auf das Gitter FDCONs wurden Perturbationen in einem Wellenzahlenbereich von $k'_{schmcb} = 0.26 - 1.95$ bzw., wenn die Normierung von der Volumenviskositätsrheologie von McKenzie ausgeht, von $k'_{mckeba} = 0.06 - 0.45$ gelegt. Eine Angabe einer Wellenzahl im üblichen Sinne ist nur für den Sinus sinnvoll. Um dennoch auch bei den elliptischen Geometrien eine Art Wellenzahl angeben zu können und um untereinander vergleichbare Modelle zu erhalten, wurden die Breiten dieser Geometrien genau so gewählt, dass sie der entsprechenden Wellenzahl einer Sinusschwingung entsprechen. Demzufolge ist die Breite der 1D Ellipse durch h/k'_{rheo} festgelegt, und für die konventionelle Ellipse gilt ein Achsenverhältnis von $h/(1.5 \times k'_{rheo}) : h/1.5$.

⁴Wie schon in Kapitel 2.4.1 erwähnt, liegt diese ungewöhnliche Winkelnotation in der Natur der in Kapitel 3 beschriebenen Kanalisierungsinstabilität:

Das Anwachsen der Porosität in den Kanälen, ausgedrückt durch die Wachstumsrate, folgt in Abhängigkeit des Auslenkwinkels einem Sinus. Im Falle von Einfacher Scherung weist dieser Sinus ein Maximum bei 135° und ein Minimum bei 45° zur Scherebene auf. Durch die hier angewendete Winkelnotation werden diese beiden Winkel auf 45° (Maximalwert) und -45° (Minimalwert) transformiert, wodurch eine künstliche Punktsymmetrie erreicht wird.

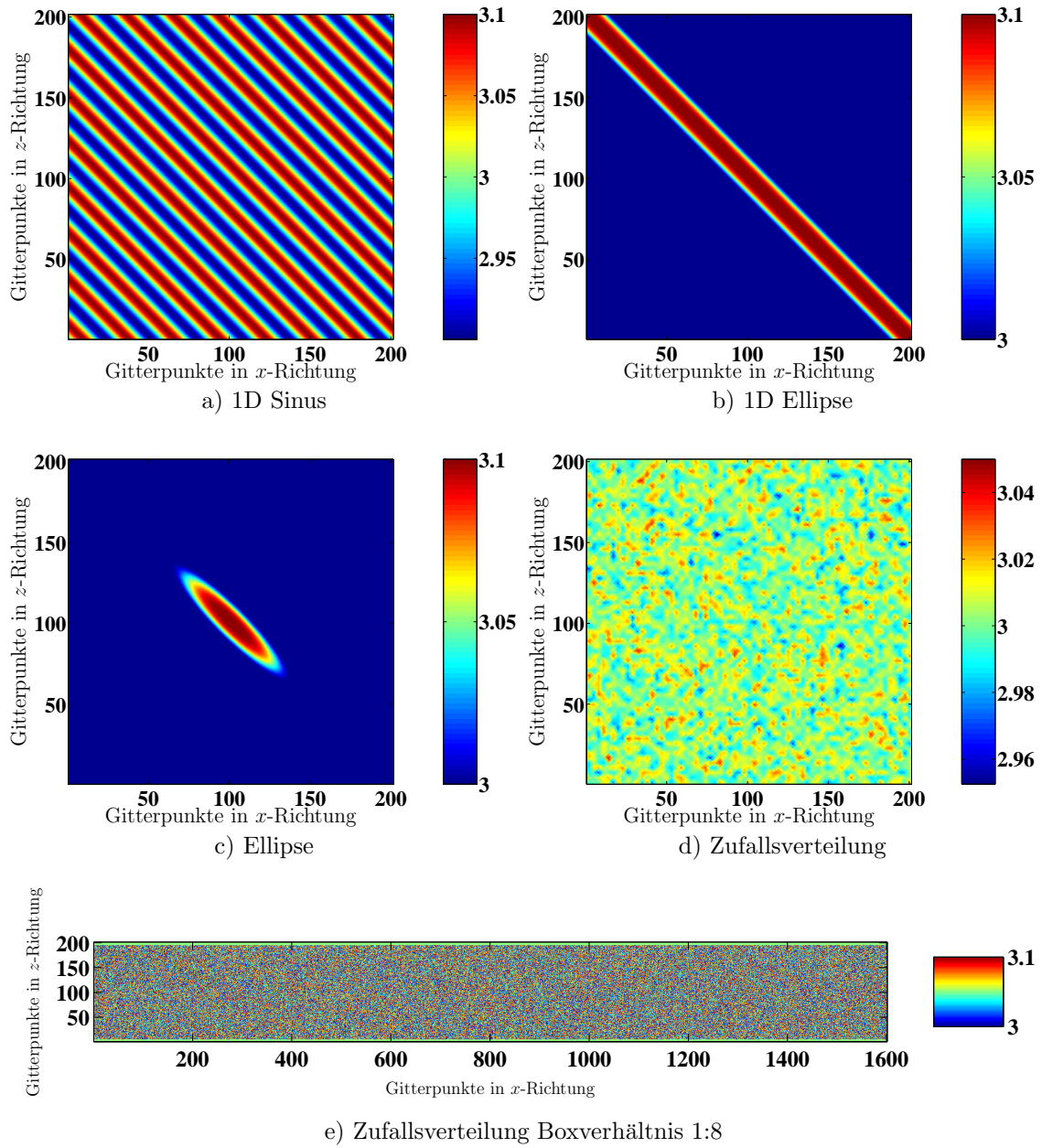


Abbildung 6.6. Die Porositätsfelder der initialen Geometrien [%]

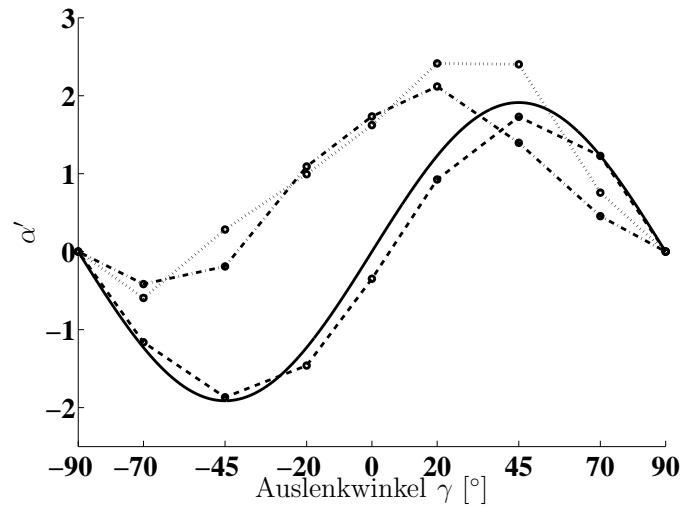


Abbildung 6.7. Beispiel der experimentell ermittelten normierten Wachstumsraten α' in Abhängigkeit des Auslenkwinkels für verschiedene Porositätsverteilungen für $k'_{schmcha} = 1.30$.

— Theorie - - 1D Sinus
 - · - 1D Ellipse · · · · 2D Ellipse

6.5 Parameterstudie: Gibbs'sche Überschwinger

Die weiterführenden Untersuchungen zeigen, dass lediglich die experimentell ermittelten Wachstumsraten der 1D Sinus Porositätsverteilung (Bsp. in Abb. 6.7, gestrichelte Linie) gut durch eine theoretisch berechnete Wachstumsraten (Abb. 6.7, durchgezogene Linie) nach Gleichung 3.8 beschrieben werden konnten, hingegen die Wachstumsraten der 1D und 2D Ellipse nicht anzupassen sind (Bsp. in Abb. 6.7, Strichpunkt-Linie und gepunktete Linie). Das Verhalten der beiden letzteren Strukturen weist einen solchen Misfit auf, dass diese allem Anschein nach nicht durch die Theorie der Kanalisierungsinstabilität erklärbar sind.

Es zeigte sich jedoch aufgrund verbesserter Analysealgorithmen, dass das zeitliche Verhalten der Porosität der 1D und 2D Ellipse, wie in Kapitel 5.1 anfänglich gezeigt, nicht nur auf einer Seite eine Asymmetrie aufweist (Abb. 5.1.b, x -Position 90 und Abb. 6.8, x -Position

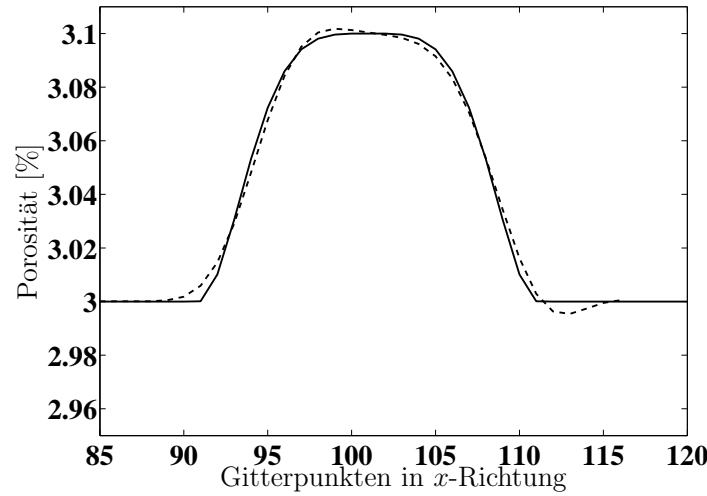


Abbildung 6.8. Querschnitt einer 1D Ellipse zur x -Achse vor und nach einer Scherdehnung.

- Anfangsstörung $k'_{schmeba} = 1.30$
- - Störung nach $\varepsilon_{xz} \approx 0.04$ (rückverschoben, Kap. 5.1)

110 – 115), sondern zusätzlich auch in dem zu bestimmenden Maximum (Abb. 6.8, bei x Position 95 – 105).

Diese Asymmetrie im Maximum der Porosität (Abb. 6.8, x -Position ≈ 97), die auf Gibbs'sche Überschwinger zurückzuführen ist, verfälscht die zeitlichen Messungen, da dieses Anwachsen schneller abläuft, als das Anwachsen der Porosität aufgrund der Kanalisierungsinstabilität, und führt somit zu falschen Wachstumsraten. Um dieses numerische Anwachsen zu analysieren und ggf. aus den weiteren Bestimmungen der Wachstumsrate herauszurechnen, wurde eine Testreihe für die Geometrien 1D Sinus, 1D Ellipse und Ellipse (initiale Porositätsverteilung, siehe Abb. 6.6, S. 81) aufgestellt, bei der die Segregation der Schmelze sehr stark behindert wird, um so das rein numerische Anwachsen der Porosität zu erhalten. Da die Segregation der Schmelze über die Schmelz-Retentionzahl Rtn gesteuert werden kann, wobei hohe Rtn eine geringe Segregation der Schmelze bedeuten, wurde diese gegenüber dem Referenzmodell erheblich erhöht (Referenzmodell: $Rtn = 0.5$; hieraus folgt mit $a = 0.001$ m, $b = 648$ h = 1000 m und $\eta_m = 10^{15}$ Pas eine Fluidviskosität von $\eta_f \approx 0.77$ Pas). Da die Fluidviskosität im Zähler von Rtn steht, kann durch ihre alleinige

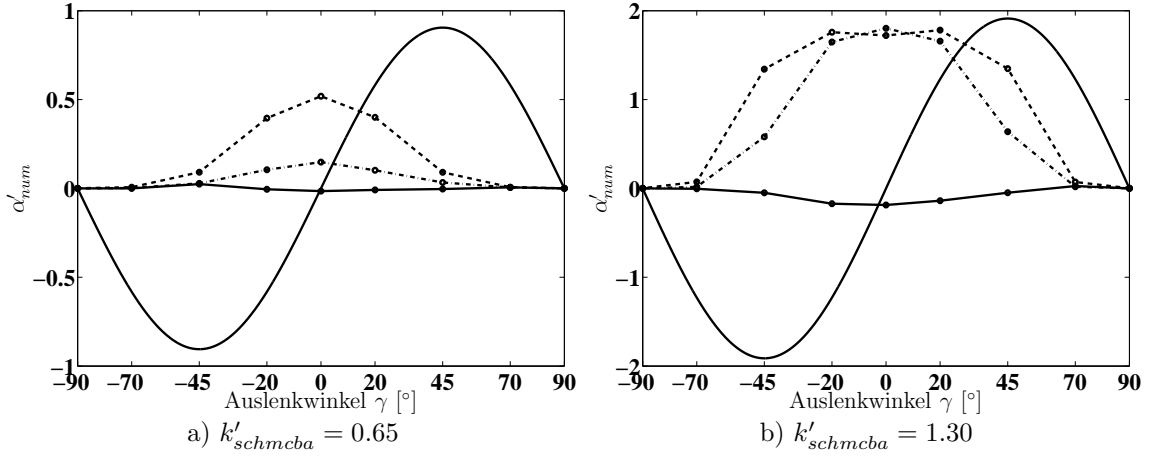


Abbildung 6.9. Testreihe Numerische Diffusion

— Theorie - - Ellipse —○— 1D Sinus - - - 1D Ellipse

Erhöhung, wobei alle anderen Parameter als konstant angesehen werden, Rtn erhöht werden. Vorstudien zeigten, dass ein Rtn von 10^{10} die Perkolation der Schmelze sehr effektiv unterdrückt. Diese hohe Schmelz-Retentionzahl entspricht mit den oben erwähnten Größen (a , b , η_m und h) einer Fluidviskosität von $\eta_f \approx 1.5 \cdot 10^{10}$ Pa s. Die weiteren Parameter dieser Studie sind: alle beschriebenen Auslenkwinkel, $k'_{schmcb a} = 0.65, 1.30$, $u' = 200$, $AZ = 0$, Rheologie von Schmeling (Glg. 2.24), $\varphi_0 = 3.0\%$, $\delta\varphi = 0.1\%$, Spannungszustand: Einfache Scherung.

In Abbildung 6.9 ist die sich aufgrund von numerischen Effekten einstellende Wachstumsrate α'_{num} für die oben beschriebenen Strukturen dargestellt. Unter der Annahme, dass keine numerischen Effekte auftreten, wäre eine horizontale Linie bei $\alpha'_{num} = 0$ für alle Auslenkwinkel zu erwarten. Es ist ersichtlich, dass sich für den 1D Sinus eine leicht um $\alpha'_{num} = 0$ schwankende Kurve ergibt. Dies spiegelt sich ebenfalls in Abbildung 6.7 wider - der 1D Sinus deckt sich am besten mit der theoretischen Kurve. Weiterhin ist auffällig, dass dort, wo $\alpha'_{num, 1D Sinus} < 0$ ist, die Werte der Abbildung 6.7 unterhalb der theoretischen Kurve liegen und vice versa. Für die beiden anderen Strukturen, die ein wesentlich stärker ausgeprägtes α'_{num} aufweisen, gilt Vergleichbares. Aus diesem Zusammenhang kann geschlossen

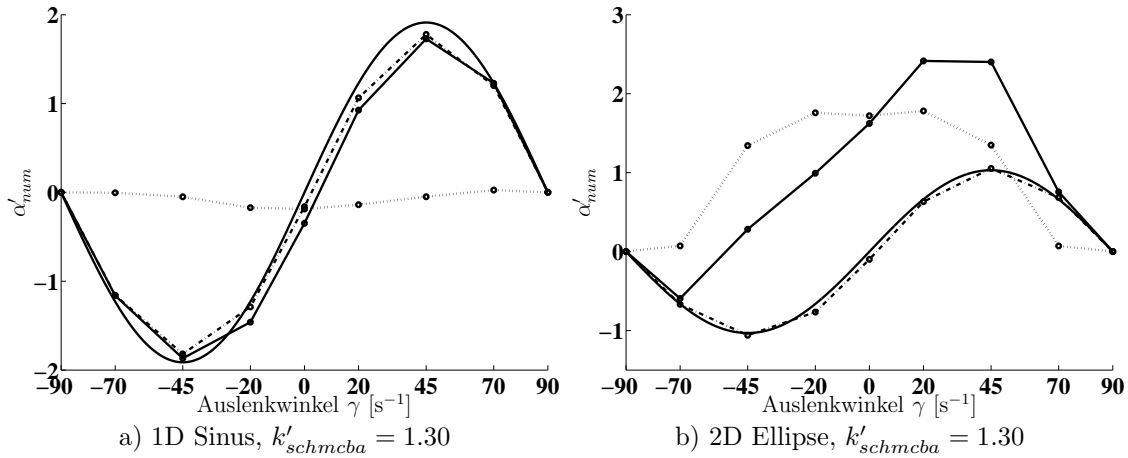


Abbildung 6.10. Beispiel der Fehlerkurvenkorrektur.

—●— Num. Versuchsreihe Fehlerkurve
 - - - Korrigierte Kurve — 1D Sinus Theorie

werden, dass durch einfaches Subtrahieren von α'_{num} von der eigentlich ermittelten Wachstumsrate α' eine wesentlich bessere Anpassung möglich wäre. Eine solche Subtraktion ist in Abbildung 6.10 exemplarisch an den in Abbildung 6.7 dargestellten 1D Sinus und der 2D Ellipse durchgeführt.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens auf den 1D Sinus zeigt sich (Abb. 6.10.a) eine leichte Verbesserung - die experimentell ermittelten Wachstumsraten rücken näher an die theoretisch vorhergesagten Werte. Anders verhält sich dagegen die 2D Ellipse, hier kann im Gegensatz zu vorher, wenn auch mit einer geringeren Wellenzahl (Kap. 6.6.4), eine theoretische Kurve gefunden werden, die sich gut mit den aus den Experimenten gewonnenen Messpunkten deckt. Das Gleiche gilt auch für die 1D Ellipse. Demzufolge kann mit diesem Verfahren der Fehler, der durch Anwendung des verbesserten Upwind-Verfahrens (Erzeugung von Gibbs'sche Überschwängern) entsteht, herausgerechnet werden. Für eine systematische Anwendung dieses Verfahrens wurden für alle in Kapitel 6.4 beschriebenen Geometrien sog. Fehlerkurven erstellt und, wie in Abbildung 6.10 gezeigt, angewendet.

Die Form der Fehlerkurven lässt sich durch die Art und Weise, wie der Maximalwert der Porosität bestimmt wird, erklären. Dieser wird in einer im Rechengebiet (Modellbox)

zentrierten Box bestimmt. Aufgrund der unterschiedlichen Auslenkungen der einzelnen Strukturen treten diese an unterschiedlichen Seiten dieser Box aus. Strukturen, die einen Auslenkwinkel von 0° , $\pm 20^\circ$ und $\pm 45^\circ$ aufweisen, treten aus dieser oben bzw. unten aus, alle anderen links bzw. rechts. Alle die oben austreten, erfahren an ihrer Austrittsstelle die gleiche Advektionsgeschwindigkeit, die die links bzw. rechts austreten, weisen mit zunehmendem Auslenkwinkel beim Austritt eine geringere Advektionsgeschwindigkeit auf. Nun steigen bekanntlich mit zunehmender Geschwindigkeit die Gibbs'schen Überschwinger an. Aus diesem Grund weisen die Strukturen, die oben austreten, vergleichbare und zugleich die größten α'_{num} auf, während die seitlich austretenden mit zunehmendem Auslenkwinkel und damit immer kleiner werdender Advektionsgeschwindigkeit ein schwächeres α'_{num} aufweisen. Ein Spezialfall ist der Auslenkwinkel 90° , bei diesem tritt kein α'_{num} auf, obwohl diese Struktur eine endliche Advektionsgeschwindigkeit aufweist. Dies liegt daran, dass die Struktur eine in horizontaler Richtung konstante Porosität aufweist und somit keine in dieser Richtung verlaufenden Gibbs'schen Überschwinger ausbilden kann.

Auffällig ist, dass dieses Verhalten nur bei der 1D und 2D Ellipse auftritt und nicht beim Sinus. Betrachtet man die zweiten Ableitungen der elliptischen Geometrien (Abb. 6.11, gepunktete Linie), so ist ersichtlich, dass genau beim Übergang der Störung zur Hintergrundporosität jeweils ein Maximum auftritt (x -Position: 92 und 113). So ändert sich dort die Porosität auf kurzer Distanz stark, wodurch sich bevorzugt Gibbs'sche Überschwinger ausbilden können. Anders verhält sich der Sinus. Dort, wo sich die Porosität stark ändert (erste Ableitung = Cosinus), verläuft diese Änderung sanft (zweite Ableitung = Sinus), während dort, wo sie sich schwach ändert, diese Änderung zwar stark ist, aber ihre Amplituden sehr klein sind. Aus diesem Grund können sich bei der Verwendung eines Sinus keine Gibbs'schen Überschwinger ausbilden.

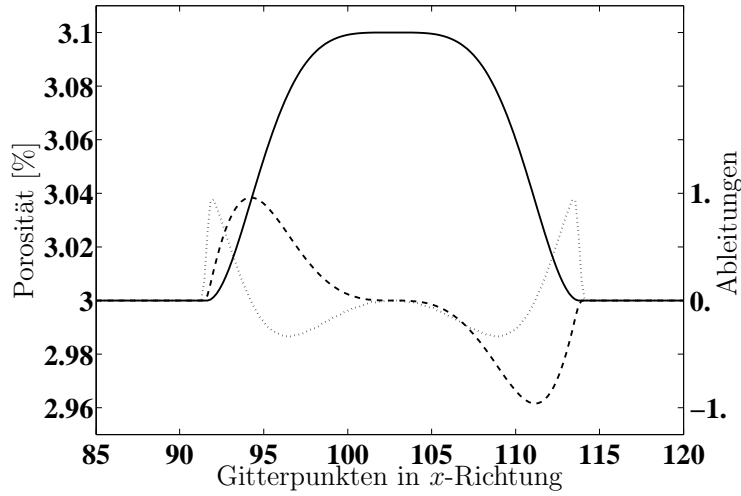


Abbildung 6.11. Darstellung eines Horizontalquerschnitts einer 1D Ellipse ($k'_{schmcb} = 1.30$) und deren erste und zweite Ableitung.

- Horizontalquerschnitt der Porosität
- - 1. Ableitung (250-fach überhöht)
- 2. Ableitung (2000-fach überhöht)

6.6 Parameterstudie: Einfache Scherung

In dieser Parameterstudie liegt das Augenmerk auf dem Einfluss des Deformationszustandes der Einfache Scherung auf die Kanalisierungsinstabilität. Hierzu werden die in Kapitel 6.4 beschriebenen initialen Porositätsverteilungen ($\varphi = 3.0\% \pm 0.1\%$ bzw. $\pm 1.0\%$) einer Einfachen Scherung unterzogen, die eine Dehnungsrate von $\dot{\epsilon} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ aufweist. Tabelle B.1 des Anhangs B gibt einen Überblick über die durchgeführten Versuche. Die weiteren Parameter sind:

Rheologie von Schmeling (Glg. 2.24), die Versuchsreihe wird unter trockenen Bedingungen durchgeführt und die Wellenzahl variiert in einem Bereich von $k'_{schmcb} = 0.26 - 1.95$, Skalierungslänge $h = 1000 \text{ m}$, Skalierungsviskosität $\eta_0 = 10^{15} \text{ Pa s}$.

Alle Wachstumsraten sind mit den Fehlerkurven korrigiert.

Im Nachfolgenden werden die Experimente beschrieben, die mit diesen Anfangs- und Nebenbedingungen erstellt wurden.

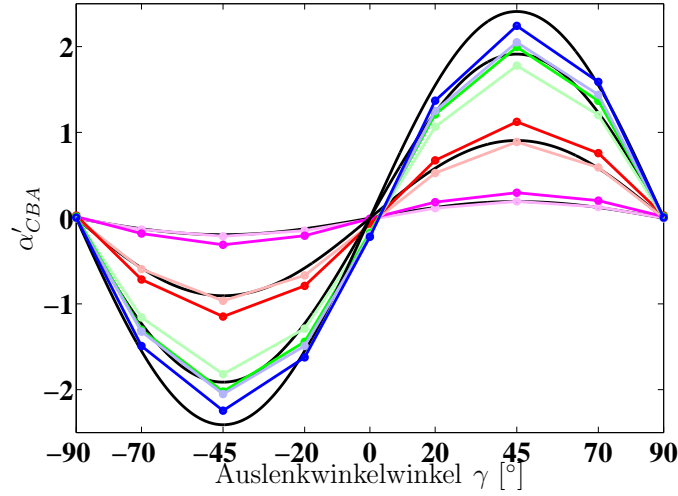


Abbildung 6.12. Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$ für einen 1D Sinus (ES)

- | | | | |
|---|-----------------------------------------------------|---|---------------------------------------------------|
| — | Theorie für $k'_{schmcba} = 0.26, 0.65, 1.30, 1.95$ | — | num. $k'_{schmcba} = 0.26, \delta\varphi = 0.1\%$ |
| — | num. $k'_{schmcba} = 0.26, \delta\varphi = 1.0\%$ | — | num. $k'_{schmcba} = 0.65, \delta\varphi = 0.1\%$ |
| — | num. $k'_{schmcba} = 0.65, \delta\varphi = 1.0\%$ | — | num. $k'_{schmcba} = 1.30, \delta\varphi = 0.1\%$ |
| — | num. $k'_{schmcba} = 1.30, \delta\varphi = 1.0\%$ | — | num. $k'_{schmcba} = 1.95, \delta\varphi = 0.1\%$ |
| — | num. $k'_{schmcba} = 1.95, \delta\varphi = 1.0\%$ | | |

6.6.1 1D Sinus

Kleine Dehnung

Abbildung 6.12 zeigt die Wachstumsrate α'_{CBA} eines 1D Sinus bei verschiedenen Auslenkwinkeln. Die schwarzen Linien stellen den theoretischen Verlauf der Wachstumsraten für $k'_{schmcba} = 0.26, 0.65, 1.30, 1.95$ dar, die farbsatten Linien zeigen die Versuchsreihe mit einer Perturbation von $\delta\varphi = \pm 1.0\%$, und die pastellfarbenen Linien bilden die Versuchsreihe mit einer Perturbation von $\delta\varphi = \pm 0.1\%$ ab.

Es zeigt sich deutlich, dass die Wachstumsrate α'_{CBA} als Funktion des Auslenkwinkels einem Sinus folgt, der bei 45° Auslenkung ein Maximum aufweist. Weiterhin wird die analytische Lösung am besten durch eine Perturbation von $\delta\varphi = \pm 0.1\%$ reproduziert. Ferner wird bei einer Wellenzahl von $k'_{schmcba} = 1.95$ der Einfluss der Gitterauflösung deutlich. Die erzielten Wachstumsraten liegen phasengleich, aber niedriger als die theoretischen Werte.

Dies steht im Einklang mit den Resultaten aus Kapitel 6.3, bei denen ein deutlicher Abfall der Wachstumsrate ab einer Wellenzahl von $k'_{schmcb} = 1.56$ erfolgte.

Aus dieser Studie kann geschlossen werden, dass FDCON unter Berücksichtigung der Fehlerkurven für Einfache Scherung die theoretischen Ergebnisse bis zu einer Wellenzahl von $k'_{schmcb} = 1.30$ sehr gut zu reproduzieren vermag.

Außerdem ist ersichtlich, dass die Verwendung einer Perturbationsamplitude von $\delta\varphi = \pm 1.0\%$ in allen Fällen eine starke Abweichung von der in der Theorie der Kanalisierungsinstabilität vorhergesagten Wachstumsrate hervorruft. Eine naheliegende Erklärung dafür ist, dass, da diese Perturbationsamplitude mehr als 30% der Hintergrundporosität ausmacht, die lineare Stabilitätsanalyse ihre Gültigkeit verliert. Dies ist auch in Abbildung 6.13 erkennbar, da für jeweils gleiche Wellenzahlen, jedoch mit unterschiedlichen Perturbationen, ein unterschiedliches Anwachsen der Maximalporosität erfolgt, demnach ein überexponentielles Wachstum stattfindet. Aus diesem Grund ist eine Startporositäts-perturbation von $\delta\varphi = \pm 0.1\%$ für weitere Parameterstudien zu bevorzugen, um im Gültigkeitsbereich der linearen Stabilitätsanalyse zu bleiben.

Große Dehnung

In dieser Studie wird ein 1D Sinus mit einer Wellenzahl von $k'_{mckcb} = 0.21$ und einer initialen Auslenkung von 45° einer Langzeitdehnung ausgesetzt. Die weiteren Parameter sind:

Rheologie von McKenzie (Glg. 2.22), die Versuchsreihe wird unter trockenen Bedingungen durchgeführt, Skalierungslänge $h = 1000$ m, Skalierungsviskosität $\eta_0 = 10^{15}$ Pa s, $Rtn = 0.5$, $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, $\varphi = 3.0 \pm 0.01\%$.

In Abbildung 6.14 ist die Entwicklung der Porosität in Abhängigkeit der Scherdehnung dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass in Abbildung 6.14.a die Porosität exponentiell ansteigt. Wird die Anfangsphase näher betrachtet (Abb. 6.14.c und Abb. 6.14.d), so ist ersichtlich, dass diese in zwei weitere Phasen unterteilt werden kann:

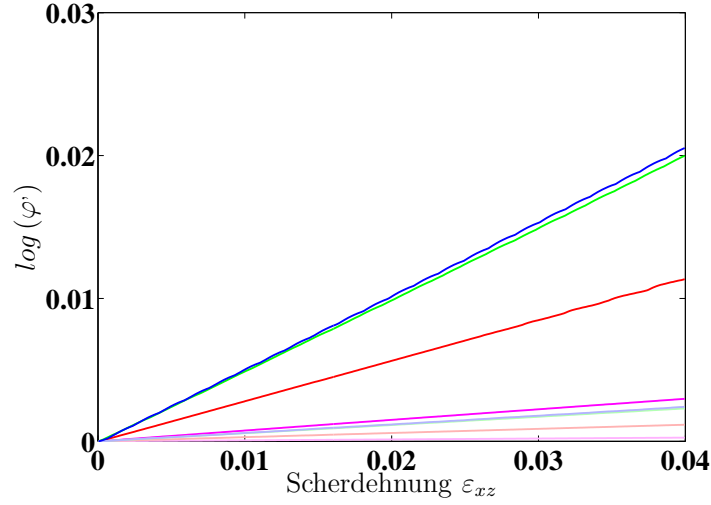


Abbildung 6.13. Logarithmus der normierten Maximalporosität $\varphi' = \varphi(\varepsilon_{xz})/\varphi_0$ für verschiedene Wellenzahlen und Porositätsperturbationen in Abhängigkeit der Scherdehnung zur Analyse des Anwachsverhaltens (über-, unter-, exponentiell) der Porosität im Anfangsstadium.

— num. $k'_{schmcba} = 0.26, \delta\varphi = 1.0\%$	— num. $k'_{schmcba} = 0.26, \delta\varphi = 0.1\%$
— num. $k'_{schmcba} = 0.65, \delta\varphi = 1.0\%$	— num. $k'_{schmcba} = 0.65, \delta\varphi = 0.1\%$
— num. $k'_{schmcba} = 1.30, \delta\varphi = 1.0\%$	— num. $k'_{schmcba} = 1.30, \delta\varphi = 0.1\%$
— num. $k'_{schmcba} = 1.95, \delta\varphi = 1.0\%$	— num. $k'_{schmcba} = 1.95, \delta\varphi = 0.1\%$

Phase Ia, in der die Porosität mit zunehmender Scherdehnung ansteigt (Abb. 6.14.c, $\varepsilon \leq 0.5$), sowie Phase Ib, in der die Porosität mit zunehmender Scherdehnung abfällt (Abb. 6.14.c, $0.5 \leq \varepsilon \leq 0.95$).

In Phase Ia beträgt der initiale Auslenkwinkel der Porositätsperturbation 45° (Abb. 6.15.a). Er liegt also im Bereich der größten Wachstumsrate. Jedoch wird die Perturbation mit zunehmender Scherung aufgerichtet (der Auslenkwinkel geht gegen 0°), wodurch die Wachstumsrate stetig abnimmt und somit auch die Perturbation immer schwächer anwächst. Hat die Perturbation aufgrund der Scherung einen Auslenkwinkel von 0° erreicht (Abb. 6.15.b), tritt Phase Ib ein. In dieser Phase herrscht eine negative Wachstumsrate vor, was zur Folge hat, dass die angewachsene Porositätsperturbation abgebaut wird. Bei anhaltender Dehnung wird die Perturbation aufgrund der Einfachen Scherung immer weiter gedreht (Abb. 6.15.c), bis sie bei einer Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} = \infty$ eine maximale Auslenkung von -45°

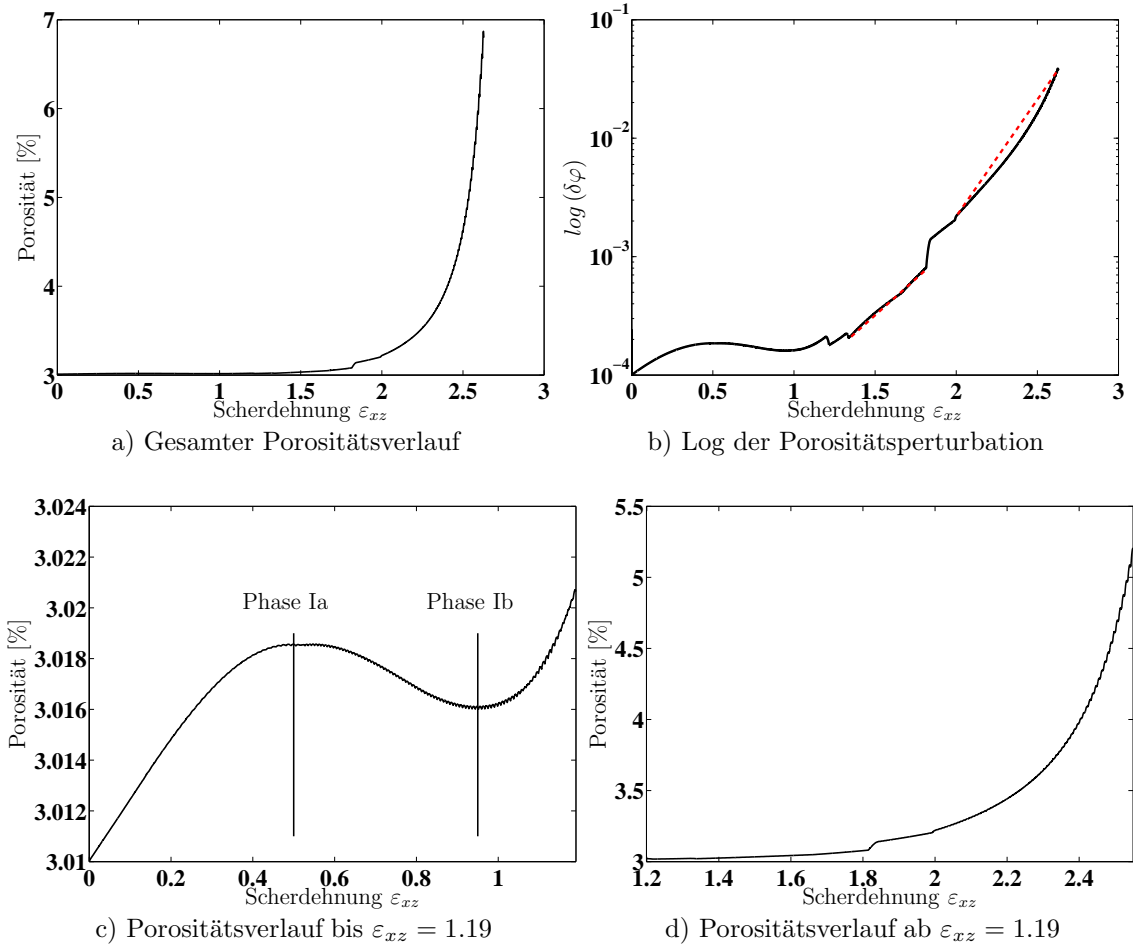


Abbildung 6.14. Maximal Porosität in Abhängigkeit der Scherdehnung für einen initial 45° orientierten Sinus (ES , $\dot{\varepsilon} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)

erreichen würde. Dementsprechend sollte Phase Ib, bei der eine negative Wachstumsrate herrscht, nicht mehr verlassen werden, was letztendlich zu einem Ausgleich der Perturbation führen würde. Jedoch tritt ab einer Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} \approx 0.8$ ein erneutes Wachstum der Porosität auf, welches sich mit zunehmender Scherung verstärkt und dem Ausgleich der Perturbation entgegenwirkt. Der bei dieser Dehnung mittlerweile auf ca. -35° orientierte, ursprüngliche 1D Sinus (Abb. 6.15.c) weist deutliche Porositätsmaxima auf, die anfangen zu zerfallen. Dieser Zerfallsprozess ist dadurch gekennzeichnet, dass senkrecht zu dem Sinus kleine 2D Ellipsen entstehen (Abb. 6.15.d). Diese nach ca. 30° ausgerichteten

Schmelzlinsen verbleiben nun in dieser Stellung (Abb. 6.15.e-6.15.f) und verstärken sich anfangs exponentiell (Abb. 6.14.b, rote gestrichelte Linie bei $1.3 \leq \varepsilon_{xz} \leq 1.8$), während sie sich im späteren Verlauf überexponentiell verstärken (Abb. 6.14.b, rote gestrichelte Linie bei $2.0 \leq \varepsilon_{xz} \leq 2.6$). In den Zwischenstadien ($1.2 \leq \varepsilon_{xz} \leq 1.3$, sowie $1.8 \leq \varepsilon_{xz} \leq 2.0$) kann aufgrund von Sprüngen (Kap. 6.1) nicht eindeutig identifiziert werden, was für ein Wachstum vorliegt. Weiterhin ist der Abfall der Wachstumsrate für $\varepsilon_{xz} \leq 1.2$ ebenfalls erkennbar.

Dieser beschriebene Zerfallsprozess des 1D Sinus erfolgt aufgrund kleiner Störungen, die sich in der 1D Sinusperturbation in der „zweiten“ Dimension ausbilden. Diese werden nun durch die unterschiedlich starke numerische Diffusion, welche um so größer ist, je höher die Advektionsgeschwindigkeit ist (Kap. 6.5), beeinflusst. Hierdurch wird dem System ein vertikal verlaufender Porositätsgradient aufgeprägt, der dazu führt, dass am Boden eine leicht höhere Porosität anzutreffen ist, als weiter oben. Durch die Scherung wird dieser Gradient, ebenfalls wie die Perturbation, gedreht. Anfangs, bei einer initialen 45° Orientierung des 1D Sinus, liegt der Gradient parallel zur maximalen Kompressionsspannung, wodurch sich kein Einfluss dieses Gradienten auf den Kanal ergibt. Mit zunehmender Scherung wird jedoch der Gradient immer mehr gedreht, wodurch er letztendlich senkrecht zur maximalen Kompressionsspannung verläuft, dementsprechend steigt die sich ausbildende Wachstumsrate des Gradienten immer mehr an. Hierdurch wird sich die Schmelze innerhalb des Kanals zusammenziehen und, wenn kleine Störungen in diesem Gradienten existieren, Schmelzlinsen bilden, die parallel zur maximalen Kompressionsspannung verlaufen. Aufgrund des numerischen Rauschens müssten demnach alle Kanäle solche Strukturen aufweisen, jedoch ist ersichtlich, dass sich diese nur in bestimmten Kanälen ausbilden. Dass einige Kanäle gegenüber anderen Kanälen bevorzugt werden, liegt daran, dass die periodischen Randbedingungen nicht perfekt erfüllt sind, so liegt z.B. ein sehr kleiner Versatz der vertikal verlaufenden Porosität am Rand vor. Dieser Versatz ist wesentlich kleiner als die eigentliche Perturbation, jedoch auch wesentlich größer als das numerische Rauschen, wodurch sich dieser Versatz nach einer gewissen Zeit verstärkt und zu dem besagten Muster führt.

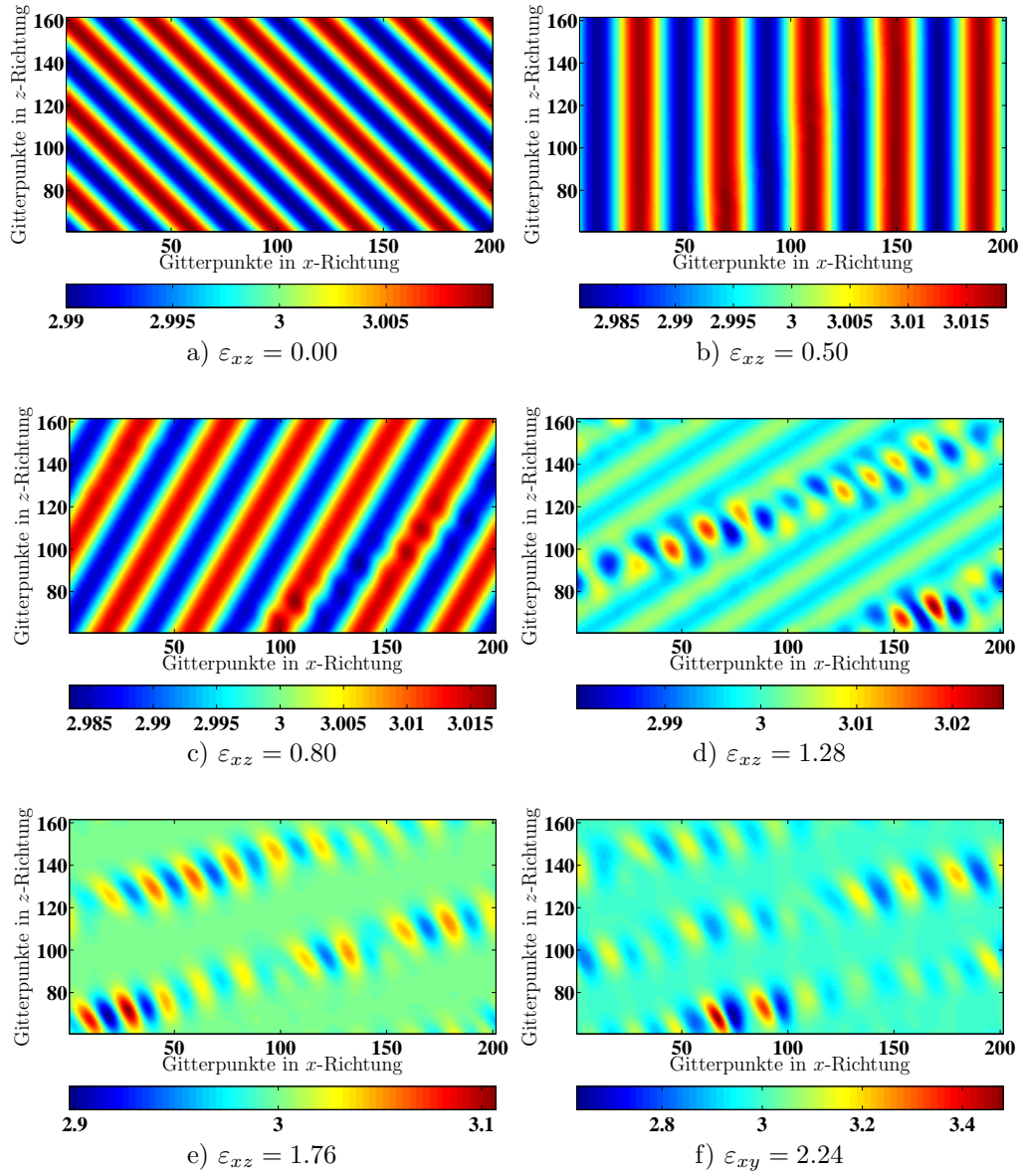


Abbildung 6.15. Porositätsverteilung [%] eines initial 45° orientierten Sinus in Abhängigkeit der Scherdehnung bei einer Scherdehnungsrate von $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$

6.6.2 1D Ellipse

Eine 1D sinusförmige Perturbation ist in den Tiefen des Untersuchungsgebietes (ca. 80 km Tiefe) eher unwahrscheinlich. Die in der Einleitung besprochenen Netzwerke sollten sich eher aus einzelnen Schmelzlinsen/-ellipsen ausbilden, die eine beliebige initiale Ori-

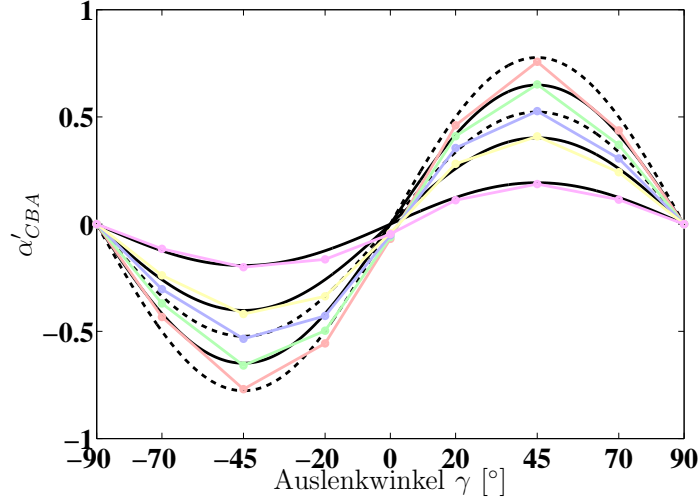


Abbildung 6.16. Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$ für eine 1D Ellipse (ES)

- | | |
|--------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|
| — Theorie für $k'_{schmcba} = 0.26, 0.39, 0.52$ | - - Theorie für $k'_{schmcba} = 0.45, 0.58$ |
| — $k'_{schmcba} = 1.30 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.58$ | |
| — $k'_{schmcba} = 1.17 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.52$ | |
| — $k'_{schmcba} = 1.04 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.45$ | |
| — $k'_{schmcba} = 0.78 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.39$ | |
| — $k'_{schmcba} = 0.65 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.26$ | |

entierung im Raum aufweisen. Folglich wurde die 1D sinusförmige Perturbation auf eine halbe Schwingung reduziert, welche allerdings die Breite einer ganzen ursprünglichen 1D Sinusschwingung aufweist (1D Ellipse, Abb. 6.6.b). Hierdurch kann die zur Charakterisierung einer Sinusschwingung verwendete Wellenzahl ebenfalls für die 1D Ellipse verwendet werden. Die Breite der 1D Ellipse ist durch $h/k'_{schmcba}$ bestimmt.

In einem Wellenzahlbereich von $k'_{schmcba} \leq 1.30$ (Kap. 6.3 und Kap. 6.6.1) ist die Auflösung des verwendeten numerischen Gitters hinreichend. Da jedoch die Wachstumsrate bei $k'_{schmcba} \leq 0.26$ sehr klein wird und dementsprechend lange Experimente durchgeführt werden müssen, um einen deutlichen Anstieg der Porosität zu erhalten, die Experimente dennoch in einer akzeptablen Zeitspanne durchgeführt werden sollen, sollten die weiterführenden Experimente deutlich über $k'_{schmcba} = 0.26$ liegen. Dementsprechend erfolgt eine Variation der Wellenzahl nur in einem Bereich von $0.65 \leq k'_{schmcba} \leq 1.30$.

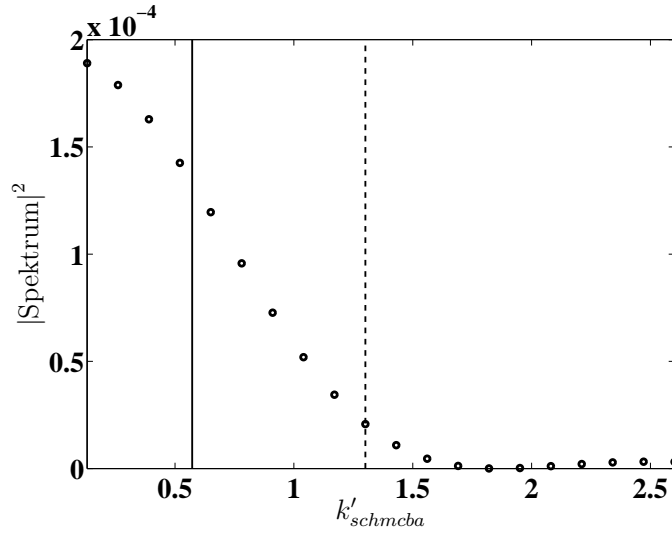


Abbildung 6.17. Powerspektren für zwei 1D Sinus und eine 1D Ellipse

- Spektrum für 1D Ellipse $k'_{schmcb} = 1.30$
- Spektrum für 1D Sinus $k'_{schmcb} = 0.57$
- - Spektrum für 1D Sinus $k'_{schmcb} = 1.30$

Die Spektren für die 1D Sinus weisen jeweils nur an einer Stelle einen Peak mit einer Amplitude von 0.01 auf. Da die anderen Spektren wesentlich kleiner sind, ist lediglich die Position dieser beiden Peaks als vertikale Linie eingezeichnet.

Wie schon in Kapitel 6.6.1 erwähnt, folgen die numerischen Ergebnisse (Abb. 6.16) einem Sinus. Dieser Sinus verläuft zwar phasengleich mit dem der Theorie, seine Amplitude ist jedoch wesentlich kleiner. Wird allerdings anstelle der Wellenzahl k'_{schmcb} eine effektive Wellenzahl von $k'_{schmcb,eff_{ES}} = 0.5 k'_{schmcb} - 0.06$ verwendet, kann eine Übereinstimmung der Amplituden erreicht werden.

Diese Reduzierung kann dadurch erklärt werden, dass, wird die 1D Ellipse Fourier zerlegt, in ihrem Spektrum wesentlich mehr Wellenzahlen vertreten sind als bei einem Sinus. In Abbildung 6.17 sind die Spektren dieser beiden Strukturen dargestellt.

In dem Spektrum der 1D Ellipsenstruktur ist deutlich zu erkennen, dass diese aus einer Vielzahl von Wellenzahlen zusammengesetzt ist. Dies hat zur Folge, dass die Kanalisierungsinstabilität nicht nur, wie beim Sinus, durch eine ausgezeichnete Wachstumsrate gesteuert wird, sondern das Wachstum durch eine Summe von vielen Wellenzahlen bestimmt

wird. Hinzu kommt, dass die Hauptenergie der 1D Ellipse mit $k'_{schmcb a} = 1.30$ bei Wellenzahlen liegt, welche kleiner als die des 1D Sinus mit $k'_{schmcb a} = 1.30$ (gestrichelte Linie) sind. Aus diesem Grund erfolgt, wenn $k'_{schmcb a} = 1.30$ in der Berechnung der theoretischen Wachstumsrate für die 1D Ellipse nach Gleichung 3.8 verwendet wird, eine Überschätzung derselben. Wird Abbildung 6.16 dahingehend ausgewertet⁵, welche Wellenzahl eines 1D Sinus am besten die 1D Ellipsenwachstumsraten reproduziert, so folgt, dass, wird eine effektive Wellenzahl von $k'_{schmcb a, effES} = 0.5 k'_{schmcb a} - 0.06$ verwendet, die Theorie der linearen Stabilitätsanalyse, die ja von einer einzigen Wellenzahl ausgeht, ebenfalls auf die 1D Ellipse angewendet werden kann. Die Verwendung der effektiven Wellenzahl hat im Spektrum zur Folge, dass der Peak des Sinus mehr in den Bereich der Hauptenergie der 1D Ellipse zum liegen kommt (durchgezogenen Linie). Hierdurch kann, da der Proportionalitätsfaktor unabhängig von der hier vorgestellten Rheologie ist, unter Verwendung von $k'_{rheo, effES}$ die Wachstumsrate für eine 1D Ellipsenstruktur vorhergesagt werden.

6.6.3 Ellipse

Die Untersuchung der 1D Strukturen lieferte interessante Ergebnisse bezüglich der Geometrien und deren Einfluss auf die Kanalisierungsinstabilität. Der nächste Schritt ist die Untersuchung von Schmelzlinsen (elliptische Perturbationen), welche ein Anfangsstadium von Kanälen widerspiegeln sollen. Diese elliptischen Perturbationen werden durch ihr Achsenverhältnis bestimmt. Um die eingeführte Wellenzahl $k'_{schmcb a}$ des 1D Sinus ebenfalls verwenden zu können, gilt folgende Konvention:

Die lange Halbachse der Ellipse beträgt stets $h/1.5$, und für die kurze Halbachse gilt $h/k'_{schmcb a}$ (Kapitel 6.6.2).

In dieser Studie variiert der Auslenkwinkel wie zuvor und die Wellenzahl $k'_{schmcb a}$ in einem Bereich von $k'_{schmcb a} = 0.25 - 1.94$. Die Amplitude der Perturbationen beträgt $\delta\varphi = 0.1\%$.

⁵lineare Regression der $k'_{schmcb a}$ bezüglich der $k'_{schmcb a, effES}$

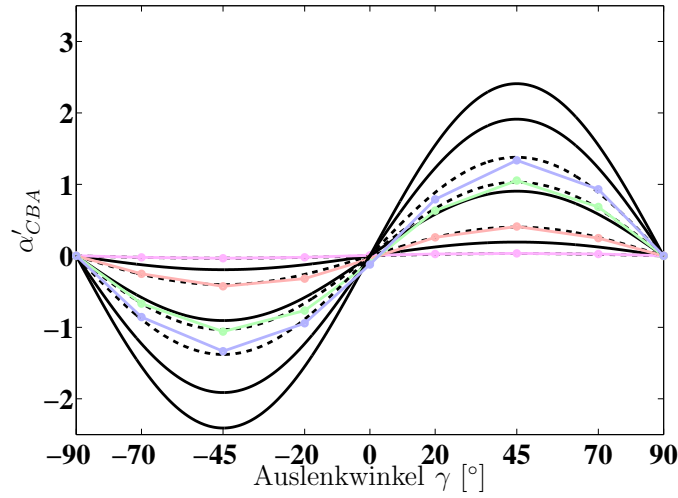


Abbildung 6.18. Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$ für eine Ellipse (ES)

- Theorie für $k'_{schmcba} = 0.26, 0.65, 1.30, 1.95$
- - Theorie für $k'_{schmcba} = 0.10, 0.39, 0.71, 0.91$
- $k'_{schmcba} = 0.26 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.10$
- $k'_{schmcba} = 0.65 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.39$
- $k'_{schmcba} = 1.30 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.71$
- $k'_{schmcba} = 1.95 \rightarrow k_{schmcba,effES} = 0.91$

Nach der Korrektur der Rohdaten mit den Fehlerkurven können die Phase und die Amplitude wiederum, wie in Kapitel 6.6.2 beschrieben, durch eine effektive Wellenzahl von $k'_{schmcba,effES} = 0.47 k'_{schmcba} + 0.03$ gut mit der Theorie in Einklang gebracht werden (Abb. 6.18).

Hierbei ist zu beachten, dass, um die im vorherigen Kapitel beschriebene Erklärung der effektiven Wellenzahl ebenfalls für die 2D Ellipse anwenden zu können, der Querschnitt durch die maximale Perturbation verlaufen muss. Weiterhin ist erkennbar, dass die Reduzierung stärker ausfällt als bei der 1D Ellipse (Abb. 6.18). Dies beruht darauf, dass die Kanalisierungsinstabilität in diesem Fall von Porositätsgradienten in nunmehr zwei Dimensionen bestimmt wird. Dieser zweite Gradient der Porosität verläuft stets orthogonal zum ersten, wodurch der Richtungsverlauf des einen Gradienten auf die Wachstumsrate verstärkend wirkt, während der zweite eine Abschwächung hervorruft. Aufgrund der unterschiedlich

langen Halbachsen und damit unterschiedlicher Wellenzahlen in Richtung der Gradienten, überwiegt einer der beiden Effekte. Dies bewirkt eine gegenüber der 1D Ellipse niedrigere effektive Wellenzahl $k'_{schmcb,eff_{ES}}$.

6.6.4 Resultate der Parameterstudien Einfache Scherung

Die Ergebnisse der 1D Sinusstruktur mit einer Perturbation von $\varphi \pm 0.1\%$ können gut durch die Theorie der Kanalisierungsinstabilität vorhergesagt werden. Die mit einem $\varphi \pm 1.0\%$ zeigen jedoch nicht vernachlässigbare Unterschiede auf, die allerdings darauf zurückzuführen sind, dass die lineare Stabilitätsanalyse der Kanalisierungsinstabilität bei solch großen Perturbationen ihre Gültigkeit verliert, da die Berechnungen im nichtlinearen Bereich erfolgten. In beiden Fällen tritt bei den zur Berechnung der Wachstumsrate benutzten Daten kein über- oder unterexponentielles Wachstum auf.

Da FDCON eine „interne“, mit steigender Wellenzahl und Geschwindigkeit zunehmende, numerische Wachstumsrate aufweist, müssen die Rohdaten mit den Fehlerkurven korrigiert werden.

Es sei weiterhin angemerkt, dass die hier vorgestellte Theorie der Kanalisierungsinstabilität weder für 2D Strukturen, noch für 1D nichtperiodische Geometrien entwickelt wurde, diese Strukturen jedoch mit Hilfe einer Fourier Analyse zerlegt werden können und das Resultat dieser Zerlegung auf die Kanalisierungsinstabilitätstheorie angewendet werden kann, um dennoch eine theoretische Wachstumsrate vorhersagen zu können.

Meines Erachtens kann ebenfalls eine theoretische Wachstumsrate vorhergesagt werden, wenn die für die Theorie vorgeschriebene Wellenzahl k'_{schmcb} durch eine effektive Wellenzahl $k'_{schmcb,eff_{ES}}$ ersetzt wird, mit

$$k'_{schmcb,eff_{ES}} = \begin{cases} k'_{schmcb} & \text{1D Sinus} \\ 0.5 k'_{schmcb} - 0.06 & \text{1D Ellipse} \\ 0.47 k'_{schmcb} + 0.03 & \text{Ellipse.} \end{cases} \quad (6.9)$$

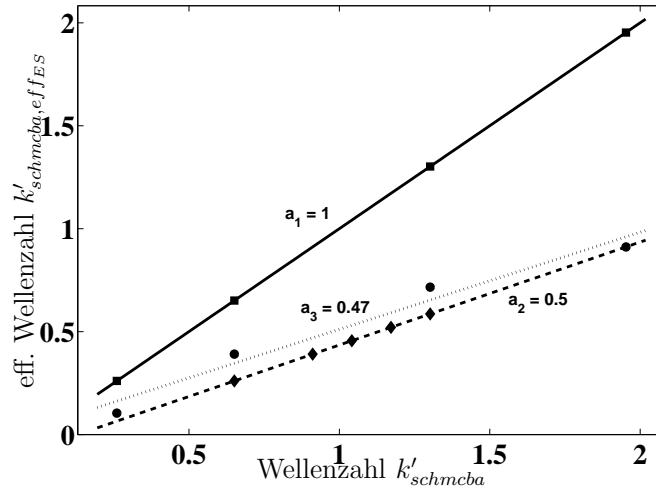


Abbildung 6.19. Bestimmung der effektiven Wellenzahl für alle getesteten endlichen Geometrien (Einfache Scherung)

- | | |
|----------------------------------|--------------|
| — Regressionsgerade Sinus | □ Sinus |
| - - Regressionsgerade 1D Ellipse | ◇ 1D Ellipse |
| Regressionsgerade Ellipse | ● Ellipse |

Diese Zusammenhänge entstammen einer linearen Regression der effektiven Wellenzahlen bezüglich der theoretischen Wellenzahlen, mit denen die Geometrie erstellt wurde (Abb. 6.19). Allem Anschein nach wirkt sich die Breite und damit das Frequenzspektrum der positiven Perturbation entscheidend auf die Amplitude der Wachstumsrate aus.

Das Anwachsen der Perturbationen verläuft bis hin zu großen Dehnungen exponentiell, lediglich bei extrem angewachsenen Perturbationen ($\delta\varphi \geq 10\%$) konnte ein überexponentielles Wachstum festgestellt werden.

Abschließend sei erwähnt, dass, bedingt durch die verwendete Gitterauflösung, ein Abfall der Wachstumsrate bei einer normierten Wellenzahl von $k'_{schmcbg} \approx 1.56$ auftritt. Hierdurch wird das von FDCON zu lösende Modell gitterauflösungsabhängig. Dies fand ebenfalls Richardson (1998). Als „Workaround“ kann anstelle der normierten Wellenzahl $k'_{schmcbg}$ die Skalierungslänge h (für FDCON bis zu $h \approx 60$ m) bei festgehaltener Wellenzahl variiert werden. Hierdurch können Strukturen im Zehnermeterbereich untersucht werden.

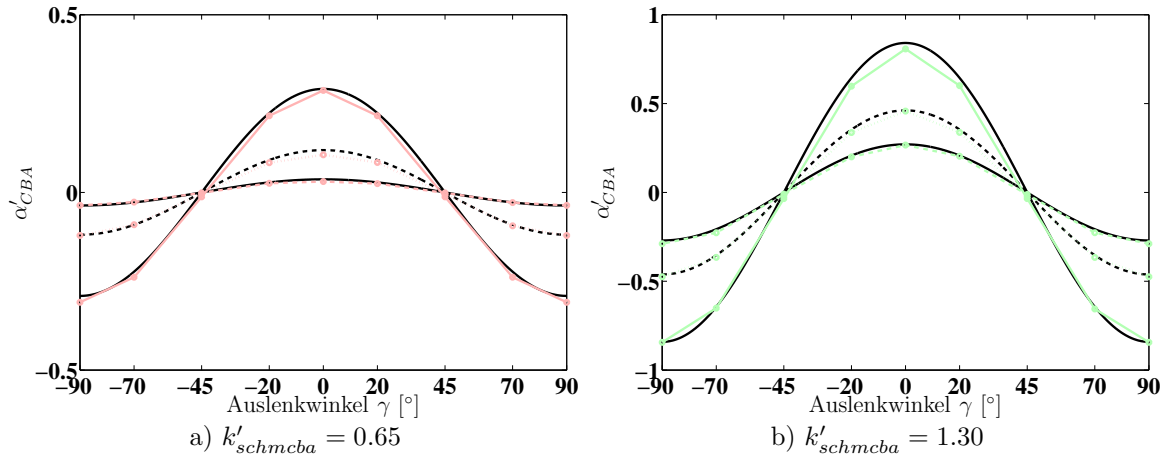


Abbildung 6.20. Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$ für alle initialen Strukturen (RS)

- | | |
|----------------------------------------|----------------------------------------|
| — Theorie für $k'_{schmcb a} = 0.65$ | — Theorie für $k'_{schmcb a} = 1.30$ |
| - - Theorie für $k'_{schmcb a} = 0.40$ | - - Theorie für $k'_{schmcb a} = 0.84$ |
| — Theorie für $k'_{schmcb a} = 0.22$ | — Theorie für $k'_{schmcb a} = 0.62$ |
| — 1D Sinus | — 1D Sinus |
| - - 1D Ellipse | - - 1D Ellipse |
| Ellipse | Ellipse |

6.7 Parameterstudie: Reine Scherung

Aus Gründen der Vollständigkeit⁶, aber auch mit der Hoffnung, größere Auflösungen⁷ zu erreichen, wurde ebenfalls der Deformationszustand Reine Scherung untersucht. Es wurden die gleichen initialen Geometrien wie in Kapitel 6.6 analysiert, allerdings nur für die Wellenzahlen $k'_{schmcb a} = 0.65$ und $k'_{schmcb a} = 1.30$, da bei diesen der Effekt der Kanalisierungsinstabilität unter den verwendeten Randbedingungen am besten aufgelöst wird. Eine genaue Parameterliste ist im Anhang B, Tabelle B.1, zu finden.

⁶Unter fluiddynamischen Bedingungen unterscheiden sich Einfache Scherung und Reine Scherung nur durch $rot\vec{u}$.

⁷Aus Symmetriegründen ist es nur nötig, 1/4 des Untersuchungsgebietes zu berechnen, wodurch bei gleichbleibendem nx und nz gegenüber Einfacher Scherung eine doppelt so große Gitterauflösung erreicht werden kann.

In Abbildung 6.20 ist deutlich erkennbar, dass, unter Verwendung der Fehlerkurven für Reine Scherung, alle untersuchten Geometrien durch eine theoretische Kurve mit einer effektiven Wellenzahl von

$$k'_{schmcb,effRS} = \begin{cases} k'_{schmcb} & \text{1D Sinus} \\ 0.37 k'_{schmcb} & \text{1D Ellipse} \\ 0.62 k'_{schmcb} & \text{Ellipse.} \end{cases} \quad (6.10)$$

klar wiedergegeben werden können.

Nach den vielversprechenden Ergebnissen der Parameterstudie Einfacher Scherung konnte mit FDCON ebenfalls unter der Dehnungsbedingung Reiner Scherung das Verhalten der Kanalisierungsinstabilität reproduziert werden.

Da jedoch in dieser Arbeit die Kanalisierungsinstabilität vor allem bei großen Dehnungen untersucht werden soll, die Möglichkeit, unter der Dehnungsbedingung Reiner Scherung diese zu modellieren mit FDCON aber nur bedingt gegeben ist, wird die weitere Untersuchung der Kanalisierungsinstabilität weitgehend auf die Verwendung dieses Deformationszustandes verzichtet, zumal er sich von dem der Einfachen Scherung im fluiddynamischen Sinne nur um eine Rotation unterscheidet.

6.8 Parameterstudie: Zufällige Porositätsverteilung

Die vorangegangenen Untersuchungen zeigen für einfache Geometrien deutlich, dass die maximale Wachstumsrate parallel zur maximalen Kompressionsspannung verläuft. Demzufolge sollten sich bei einer zufälligen Porositätsverteilung, die Einfacher Scherung ausgesetzt wird, Strukturen (Schmelzlinsen oder sogar Kanäle) bilden, die parallel zu der maximalen Kompressionsspannung verlaufen. In dieser Parameterstudie wird untersucht, ob und wie sich solche Strukturen ausbilden. So ist z. B. von Interesse, welche Art von Kanälen entstehen:

lange, zusammenhängende Kanäle oder nur kleine Schmelzlinsen, die sich ab und an zu längeren Kanälen zusammenfügen.

Weiterhin wurde untersucht, wie ein Kanalsystem auf große Scherdehnungen reagiert. Aufgrund der Scherdehnungen bei Einfacher Scherung werden ausgebildete Schmelzlinsen oder Kanäle stetig aus der optimalen Auslenkung herausgedreht; dies würde wiederum zu einer Abnahme der Wachstumsrate führen und dem letztendlichen Verschwinden dieser Strukturen. In Feldbeobachtungen von Kelemen *et al.* (2000) lassen sich aber eindeutig Kanalsysteme entdecken. Demnach könnte der Prozess der Kanalisierungsinstabilität dem Prozess des Herausdrehens entgegenwirken, wodurch die Kanäle erhalten bleiben und ggf. Scherbänder ausbilden, bei denen sich einzelne Kanalstücke aufgrund unterschiedlicher Advektionsgeschwindigkeiten wieder zusammenfinden und so wieder zusammenhängende Kanal ausbilden.

Gilt dies für das gesamte Kanalsystem, für einzelne Kanäle oder gar nur für eine Schmelzlinse, die einen kleinen Abschnitt eines Kanals widerspiegelt?

Eine weitere Möglichkeit, die Beobachtungen von Kelemen *et al.* (2000) zu erklären, wäre, dass sich das Kanalsystem unter Reiner Scherung gebildet hat, denn dabei tritt der Effekt des Herausdrehens nicht auf, da die Richtung der maximalen Kompressionsspannung parallel zu der Kompressionskomponente verläuft. Reine Scherung ohne eine Superpositionierung von Einfacher Scherung im oberen Mantel zu erhalten ist sehr unwahrscheinlich. Aus Abbildung 6.21 ist ersichtlich, dass sich bei lediglich 25% Einfacher Scherung schon deutlich ausgelenkte inhomogene Kanäle ausbilden, die, wie später gezeigt wird, im Lauf anhaltender Dehnung weiter zerfallen werden.

Abbildung⁸ 6.22 gibt Aufschluss über die Verteilung dieser beiden Spannungszustände und deren Superpositionierung anhand der normierten dimensionslosen Wirbelstärke Γ'_{21} in einem 400 km breiten und 200 km tiefen Gebiet, welches einen ausgebildeten Plume und einen MOR an der linken Seite des Gebietes aufweist⁹ Die eingezeichnete Konturlinie

⁸Die Versuchsparameter sind gemäß Kap. 6.11 gewählt.

⁹Anmerkung: Das Streifenmuster im oberen Teil der Abbildung 6.22 beruht darauf, dass in der Lithosphäre die deviatorischen Spannungen gegen Null gehen. Diese sind jedoch für die Berechnung der

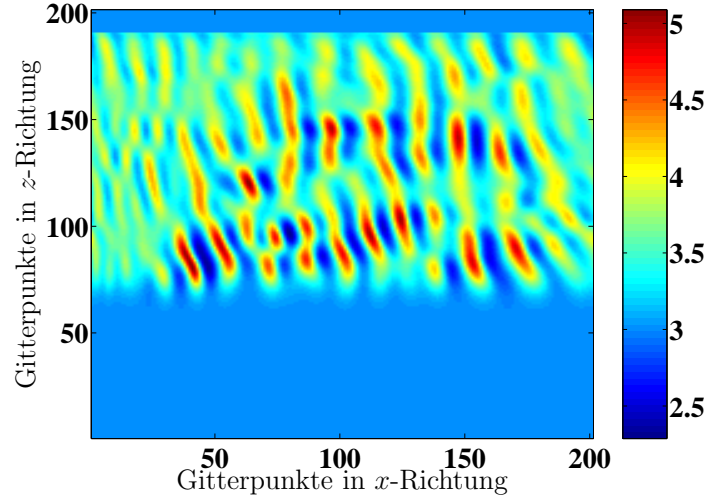


Abbildung 6.21. Porositätsverteilung [%] bei einer Superpositionierung von 25% Einfacher und 75% Reiner Scherung nach $\varepsilon \approx 0.35$ bei $\dot{\varepsilon} = 5.0 \cdot 10^{-10} \text{ m}^{-1}$ ($Rtn = 0.5$, Rheologie McKenzie, $\eta_0 = 10^{15} \text{ Pas}$, $h = 1000 \text{ m}$).

repräsentiert eine dimensionslose normierte Wirbelstärke von $\Gamma'_{21} = 0.25$, also 25% Einfache und 75% Reine Scherung. Deutlich ist zu erkennen, dass nur wenige Gebiete (grün) eine Superpositionierung aufweisen, bei der die Einfache Scherung weniger als 25% ausmacht. Aus diesem Grund kann angenommen werden, dass Kanäle eher in einem Regime entstehen, das eine nicht zu vernachlässigende Komponente von Einfacher Scherung enthält.

Um diesen und weiteren Fragen nachzugehen, wurden zwei verschiedene, zufällige Porositätsverteilungen erzeugt:

Ein tiefpassgefiltertes weißes Rauschen (rotes Rauschen, Abb. 6.6.d, S. 81, Powerspektrum 6.23), sowie ein angenähertes weißes Rauschen (Abb. 6.32.a, S. 123, Powerspektrum 6.23). Da die zufälligen Perturbationen gut durch das FDCON-Gitter aufgelöst werden sollten und in benachbarten Gitterpunkten keine großen Porositätssprünge auftreten sollten, welche, wie in Kapitel 5.1 gezeigt wurde, zu unerwünschten Gibbs'schen Überschwüngen führen können, wurde zuerst das rote Rauschen untersucht.

Richtung der maximalen Kompressionsspannung nötig. Ausdiesem Grund ist die Richtung nicht eindeutig bestimmbar, was sich in diesem Muster widerspiegelt und dementsprechend keiner weiteren Beachtung bedarf.

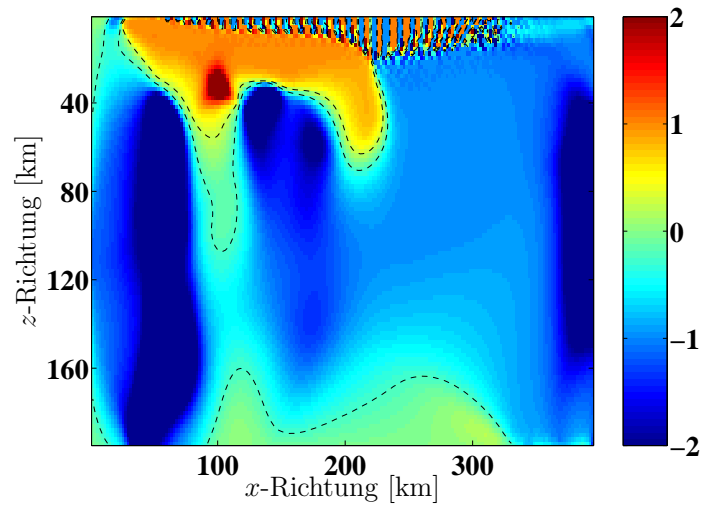


Abbildung 6.22. Die Wirbelstärke Γ' eines Strömungsfeldes, welches von einem aufsteigenden Plume unter einem spreizenden MOR nach ≈ 2 Ma erzeugt wird.

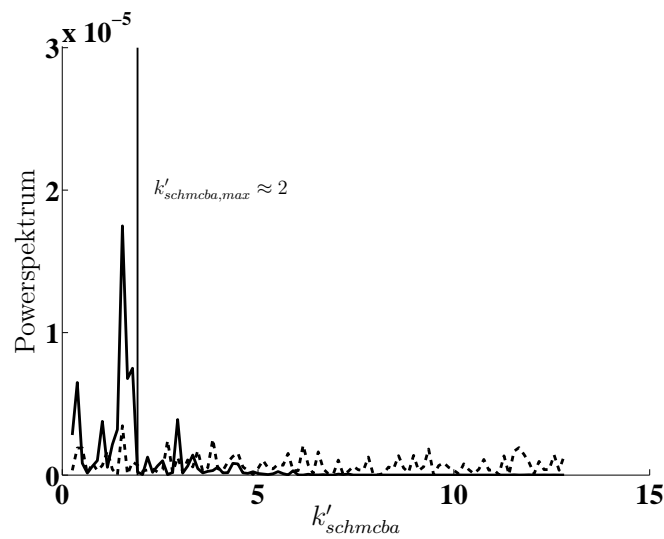


Abbildung 6.23. Powerspektrum der zufälligen Porositätsverteilungen

- Powerspektrum rot
- - Powerspektrum weiß (angenähert)

6.8.1 Scherdehnungsexperimente: Kleine Dehnung

Diese Experimente dienen der Klärung der eingangs erwähnten Frage der Bildung eines Kanalsystems aus einer zufälligen Verteilung. Sowohl eine geglättete, wie auch eine rein

zufällige Porositätsverteilung wurden hierfür bis zu einer Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} \approx 4$ geschert, allerdings werden in diesem Kapitel nur die Ergebnisse bis zu einer Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} \approx 0.8$ betrachtet. Die Ergebnisse der Langzeitstudie sind in Kapitel 6.8.2 aufgeführt.

Die Experimente wurden mit einer Dehnungsrate von $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, $Rtn = 0.5$, $AZ = 0$ und der Rheologie von McKenzie (Glg. 2.22) durchgeführt.

Die Schmelze sammelt sich anfänglich in leicht gebogenen, zusammenhängenden Kanälen mit einer inhomogenen Porositätsverteilung an, die Auslenkung der Kanäle ist offensichtlich nicht, wie es nach der Theorie zu erwarten wäre, überall gleich, sondern nimmt in z -Richtung ab (Abb. 6.24). Die tiefer liegenden Kanäle weisen einen niedrigeren Auslenkwinkel auf, als die sich über ihnen befindlichen. Weiterhin verläuft der Übergang zwischen den beiden Extremauslenkungen stetig.

Theoretisch sollten sich überall elliptische Schmelztaschen parallel zur maximalen Kompressionsspannung, also in 45° , ausbilden. Spiegelmanns (2003) Analyse zeigt allerdings, dass durch die starke Nichtlinearität der Kanalisierungsinstabilität (e -Funktion) nur Schmelztaschen, die sich anfänglich unter einem Winkel von 60° bilden, den Scherungsprozess überstehen:

Kanäle, die sich anfänglich bei 45° ausbilden, weisen zwar die höchste Wachstumsrate auf und besitzen nur eine kleine Porositätsperturbation, werden aber durch die Scherdehnung frühzeitig aus der optimalen Wachstumsrate herausgedreht. Diese Kombination ist derart ungünstig, dass sich diese Kanäle letztendlich zurückbilden. Hingegen werden Kanäle, die anfänglich unter 60° gebildet wurden, durch die Scherung zusehends in die optimale Auslenkung gedreht. Zugleich können sie bei diesem Prozess anwachsen, wodurch sie in ihrem optimalen Stadium (45°) eine große Porositätsperturbation aufweisen. Die daraus folgende Kombination, große Porositätsperturbation sowie große Wachstumsrate, führt zu einer effektiveren Verstärkung als für Kanäle, die initial unter 45° gestartet sind.

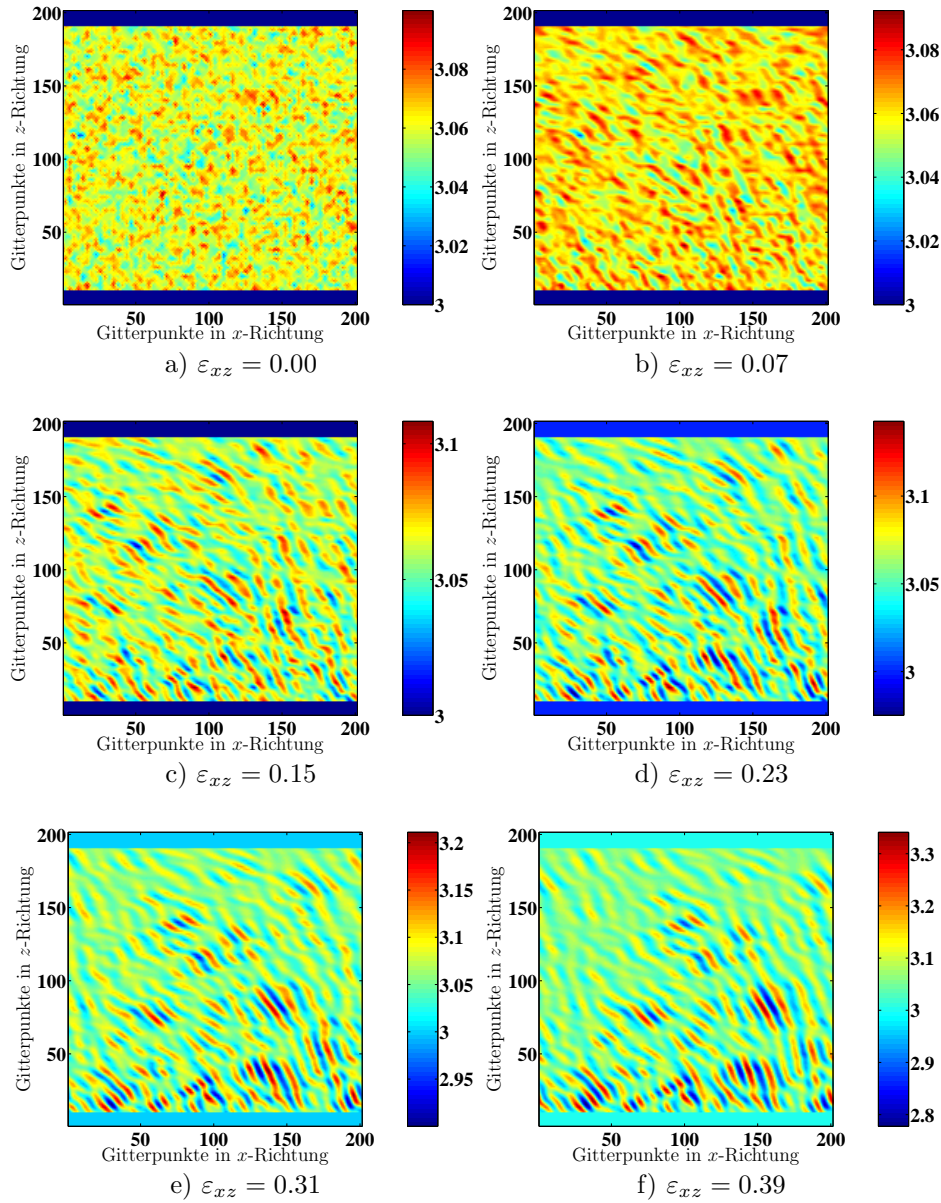


Abbildung 6.24. Porositätsverteilung [%] in Abhängigkeit der Scherdehnung (kleine Dehnung)

Aus diesem Prozess kann eine Erklärung der Ungleichverteilung des Auslenkwinkels abgeleitet werden:

Die Ungleichverteilung beruht hauptsächlich auf numerischer Diffusion, welche im unteren Bereich, bedingt durch die geringeren Geschwindigkeiten, kleiner ist, als im oberen

Bereich. Dementsprechend können sich im unteren Bereich frühzeitig Kanäle unter den günstigen, initialen 60° ausbilden, während im oberen Bereich eine verlangsamte Bildung von Kanälen in dieser Ausrichtung stattfindet. Da die Darstellung jedoch erst nach einer gewissen Dehnung erfolgt, wurden die unteren Kanäle schon aufgerichtet, während sich die oberen, gerade ausbildenden Kanäle, noch nicht aufgerichtet haben. Die Bereiche dazwischen weisen einen stetigen Übergang zwischen diesen Extrembereichen auf, weshalb die Winkel von oben nach unten stetig abfallen. So kann der numerischen Diffusion in diesem speziellen Fall etwas Nützliches abgerungen werden:

Obwohl es sich bei den Bildern um Momentaufnahmen handelt, kommt durch die numerische Diffusion ein zeitlicher Faktor hinzu: je höher sich ein Kanal befindet, desto jünger ist er. Dementsprechend konnten durch diese Studie qualitativ die theoretischen Ergebnisse von Spiegelman (2003) mit FDCON erfolgreich reproduziert werden.

Allerdings existiert immer noch eine Diskrepanz zwischen den Ergebnissen dieser Arbeit und den sich nicht aufrichtenden 60° Strukturen, die Holtzman *et al.* (2003) gefunden haben. So werden die Kanäle bei den Simulationen mit FDCON aufgerichtet bzw. sie werden nach einer relativ kurzen Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} > 1.5$ (Abschnitt 6.8.2) wieder zerrissen. Holtzman *et al.* hingegen haben selbst bei $\varepsilon_{xz} \approx 3$ keine Aufrichtung oder ein Zerreißen feststellen können. Eine Erklärung dafür wäre, dass seine Kanalisierungsinstabilität zu langsam war, als dass sich ein Aufrichten oder Zerreißen bei diesen Dehnungen feststellen ließ. Ein Indiz hierfür wäre der von Holtzman eingeführte Quotient¹⁰ $\zeta \equiv \delta_c/h$.

Dieser beschreibt das Verhältnis der Kompaktionslänge zu den Modellboxdimensionen, und damit, wie gut das Untersuchungsgebiet kompaktieren kann.

Ist $\zeta \gg 1$, so kann die Schmelze zu einfach durch die Matrix segregieren, entweder weil die Fluidviskosität klein ist, oder aber die Permeabilität zu groß, was zur Folge hat, dass die Matrix gut kompaktiert und somit Druckgradienten effizient ausgleichen kann.

Da jedoch ein sich selbst verstärkender Druckgradient das Herzstück der Kanalisierungsinstabilität ist, darf dieser nicht zu schnell durch Kompaktion der Matrix abgebaut werden.

¹⁰Skalierungslänge h = Schichtdicke

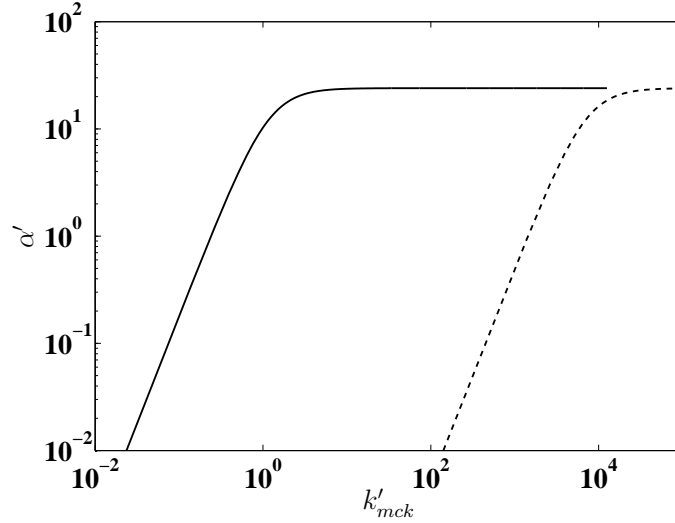


Abbildung 6.25. Vergleich der durchschnittlichen Wachstumsrate dieser Arbeit ($\eta_b = \eta_s = 10^{15}$ Pa s, $\eta_f = 0.77$ Pa s, $\varphi_0 = 3\%$, $\dot{\epsilon}_{xz} = 10^{-10}$ s $^{-1}$, $\delta_{c,mck} = 11$ m) mit der aus den Holtzman-Experimenten ($\eta_b = \eta_s = 10^{10}$ Pa s, $\eta_f = 10$ Pa s, $\varphi_0 = 3\%$, $\dot{\epsilon}_{xz} = 10^{-5}$ s $^{-1}$, $\delta_{c,holtz} = 10^{-2}$ m)

— Typische Wachstumsrate dieser Arbeit - - Theoretische Wachstumsrate für die Holtzman et al. Experimente

Wenn also ζ in der Nähe von oder unter 1 liegt, bedeutet dies, dass die Matrix schlecht kompaktiert und sich somit ein Druckgradient aufbauen kann, der dann, je stärker er ist, eine entsprechend größere Wachstumsrate hervorruft (Kap. 3). Dieses Verhalten lässt sich ebenfalls an Abbildung 6.2 erkennen: die Wachstumsratenkurve mit der kleinsten Kompaktionslänge (Rheologie von McKenzie) und damit kleinstem ζ liegt über allen anderen Wachstumsratenkurven, da diese eine größere Kompaktionslänge aufweisen.

Bei den Experimenten Holtzmans lag ζ zwischen 0.05 – 10.5 (Holtzman *et al.*, 2003, Tab. 1), wobei sich bei ihm bis zu einem ζ von 2.1 Kanäle ausbildeten.

In dieser Arbeit liegt der Quotient¹¹ bei $\zeta < 0.01$. Aus Abbildung 6.25 ist außerdem ersichtlich, dass in dieser Arbeit wesentlich größere Wachstumsraten untersucht wurden, als bei den Experimenten von Holtzman *et al.* (Abb. 6.25). Hierdurch könnte die hier untersuchte Kanalisierungsinstabilität um eine Größenordnung oder mehr schneller abgelaufen

¹¹ $4.8 \leq \delta_{c,rheo} \leq 21.4$ m, $h = 1000$ m

sein, als bei Holtzman *et al.*. Aufgrund dessen kann der Beschreibung von Holtzman *et al.* von ζ hinzugefügt werden, dass, je kleiner ζ ist, desto stärker die Kanalisierungsinstabilität ausgeprägt ist.

Dies hat zur Folge, dass die numerischen Experimente nur im Anfangsstadium, in dem auch 60°-Winkel festgestellt werden konnten, mit denen von Holtzman *et al.* vergleichbar sind.

Des Weiteren weisen Holtzman *et al.* darauf hin, dass ihre Randbedingungen nicht vergleichbar mit denen der Kanalisierungsinstabilität sind und dass sie wohl eher eine Kompaktionstheorie, welche auf einem „damage mechanism“ (Bercovici *et al.*, 2001) beruht, messen. Ihre Erklärung für diese niedrigen Winkel ist, dass sich eine Superpositionierung zwischen dem bevorzugten Kanalisierungsinstabilitätswinkel von 45° und einem horizontal verlaufenden „shear partitioning“ einstellt, dieses Partitionieren aber in der Theorie von Stevenson (1989) nicht berücksichtigt wird.

6.8.2 Scherdehnungsexperimente: Große Dehnung

In diesem Experiment wird gezeigt, wie ein Kanalsystem auf große endliche Dehnung reagiert. Die Parameter dieser Studie sind die gleichen wie im vorherigen Kapitel: Zufällige Porositätsverteilung (bunt und weiß), maximale Dehnung $\varepsilon_{max} \approx 2$, Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, $Rtn = 0.5$, $AZ = 0$ und die Rheologie von McKenzie (Glg. 2.22). In Abbildung 6.26 sind die Ergebnisse dieser Studie dargestellt. Wie in Kapitel 6.8.1, zeigt sich, dass sich die Schmelze anfänglich in elliptischen Schmelztaschen parallel zur MKS ansammelt. Diese Ansammlung führt ebenfalls dazu, dass sich längere Kanäle mit einer inhomogenen Schmelzverteilung ausbilden. Wie bereits in Kapitel 6.8.1 erläutert, weisen die Kanäle lediglich im unteren Teil der Box die von der Theorie vorhergesagte Auslenkung von 45° auf, die dann mit ansteigender z -Richtung leicht zunimmt (Abb. 6.26.b). Bei anhaltender Dehnung verstärken sich in den langen, inhomogenen Kanälen die Bereiche erhöhter Schmelzkonzentration und bilden Schmelzlinsen aus, die entsprechend der Theorie um 45° ausgelenkt sind

(Abb. 6.26.b). Bedingt durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten, wirkt die numerische Diffusion unterschiedlich stark, wodurch sich die unten liegenden Kanäle effizienter verstärken als die oberen (Abb. 6.26.c).

Dieses Anwachsen der Porosität würde sich bei anhaltender Dehnung stetig fortsetzen, bis sich nach einer Dehnung von $\varepsilon \approx 0.85$ eine Porosität von 100% einstellen würde. Für FDCON muss jedoch aus Stabilitätsgründen eine Porositätsobergrenze von 15% festgesetzt werden.

Ist diese Grenze erreicht, darf sich die Schmelze zwar weiter akkumulieren, ihre Maximalamplitude steigt jedoch nicht weiter an. Aus diesem Grund holen die höherliegenden Schmelztaschen, bei denen ja die numerische Diffusion eine schnelle und effiziente Akkumulation behindert hat, auf, bis sich im gesamten Gebiet Schmelztaschen mit einer Maximalporosität von 15% gebildet haben (Abb. 6.26.d). Die anfänglich noch zusammenhängenden Kanäle werden, obgleich Einfache Scherung diese lediglich drehen sollte, auseinander gerissen (Abb. 6.26.e). Dieser Zerreiprozess ist darauf zurückzuführen, dass in den Schmelzlin sen eine geringere bis hin zu einer entgegengesetzten Wirbelstärke auftritt (Abb. 6.27.e und 6.27.f, sowie Kap. 6.8.3).

Bei weiterer Dehnung tritt nun ein „Heilungsprozess“ der Kanäle auf:

Bedingt durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten, berholen höher liegende Inklusionen tiefer liegende. Liegen nun Inklusionen entsprechend nahe übereinander, so verbinden sich diese während des berholvorgangs und bilden einen zusammenhängenden Kanal (Abb. 6.26.f), in dem die Schmelze aufsteigen kann, bevor dieser wieder zerrissen wird. Anzumerken ist, dass sämtliche Experimente ohne Schmelzauftrieb berechnet wurden. Die Effekte des Schmelzauftriebes werden in Kapitel 6.10 diskutiert.

Holtzman *et al.* (2003) haben dieses Verhalten in ihren Experimenten nicht festgestellt. Dies liegt, wie schon in Kapitel 6.8.1 erwähnt, daran, dass ihre Experimente um eine Größenordnung langsamer abliefen, als die hier vorgestellten.

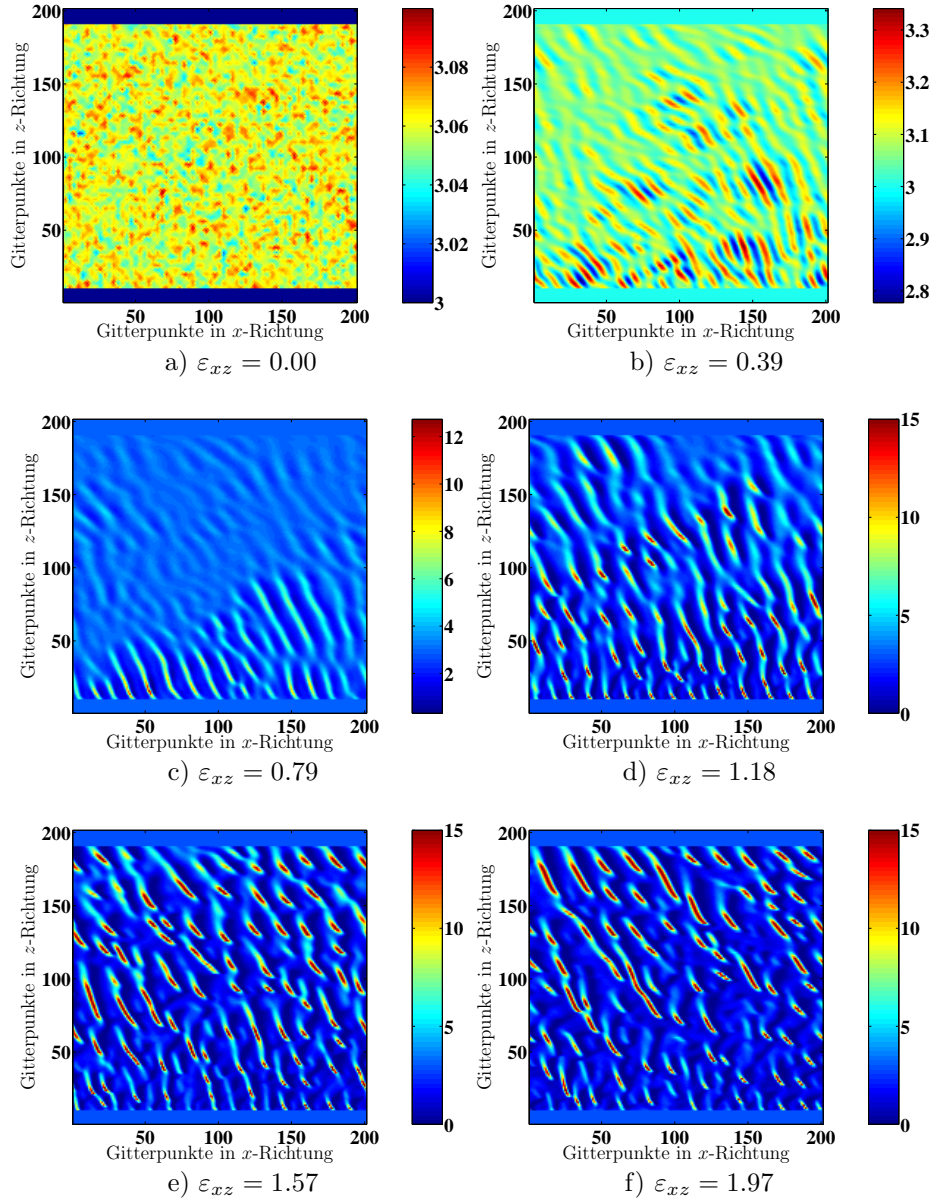


Abbildung 6.26. Porositätsverteilung [%] in Abhängigkeit der Scherdehnung (Große Dehnung)

6.8.3 Detailauswertung

In diesem Kapitel wird an einer ausgesuchten Dehnung ($\varepsilon_{xz} \approx 1.6$) eine erweiterte Auswertung der von FDCON erzeugten Ergebnisse vorgenommen. Zu diesem Zweck werden die

folgenden physikalischen Größen dargestellt:

Die Porosität φ , die Scherdehnungsrate $\dot{\epsilon}_{xz}$, die $\partial u_x / \partial z$ -Komponente der Scherdehnungsrate, die Scherspannung τ_{xz} (Abb. 6.27.a - 6.27.d), die Wirbelstärke Γ (Glg. 2.36, Abb. 6.27.e), sowie die normierte Wirbelstärke Γ' (Abb. 6.27.f). Weiterhin abgebildet sind die zweite Invariante der Dehnungsrate $\dot{\epsilon}_{II}$ (Abb. 6.28.a), die zweite Invariante der Spannung τ_{II} (Abb. 6.28.b), die aus diesen beiden Größen berechnete Dissipationsrate $\dot{\chi} = 0.5 \tau_{II} \dot{\epsilon}_{II}$ (Abb. 6.28.c), der Auslenkwinkel der Kanäle, der sich aus der Berechnung des Hauptspannungssystems ergibt (Abb. 6.28.d), und ein Histogramm der Auslenkwinkel der Kanäle (Abb. 6.28.e). Zur besseren Orientierung ist die Porositätsverteilung in Isolinien hinzugefügt.

Die Scherdehnungsrate (Abb. 6.27.b) weist ein Hintergrundmuster (dunkelblau und hellblau) von leicht aus der Vertikalen gekippten Strukturen auf (15° Auslenkung). Dieses Muster weist darauf hin, dass sich keine horizontal, sondern eher vertikal verlaufende Scherbänder ausgebildet haben. Die Scherung, die die Matrix dementsprechend vollführt, ist daher mit einer „book shelf“-Scherung vergleichbar, im Gegensatz zu einer Scherung, die horizontale Scherbänder (ähnlich einer Scherung eines Spielkartenstapels) ausbildet (Mandl, 1987). Die „book shelf“-Scherung bildet zur Scherebene stark geneigte, jedoch untereinander parallel verlaufende, Scherbändern aus. Während die harten Regionen durch die Scherung aufgestellt und ggf. gestaucht werden (sie vollführen sowohl eine Rotation als auch eine Translation), bewirken die weichen, dass die sich aufstellenden harten Regionen aneinander vorbeischieben können. Als analoges Beispiel zum Spielkartenstapel kann hier, wie der Name dieser Scherungsart schon besagt, ein Bücherregal mit aufrecht stehenden, aber gekippten Büchern dienen, die an ihrer Oberseite gesichert werden. Die Bücher (harte Matrix) werden dadurch aufgestellt, während sie an ihren Buchdeckeln/-rücken (weiche Matrix) aneinander vorbei gleiten.

Der in der Theorie der Kanalisierungsinstabilität (Kap. 3) beschriebene Prozess der Ausbildung eines Druckgradienten, der dann für eine Fokussierung der Schmelze in Schmelzlinen bzw. Kanälen verantwortlich ist, kann indirekt¹² in der Scherspannung (Abb. 6.27.d) beob-

¹²Aufgrund der mathematischen/numerischen Realisierung von FDCON, ist FDCON nicht in der Lage, den Druck direkt zu berechnen, sondern lediglich über die Spur des Spannungstensors.

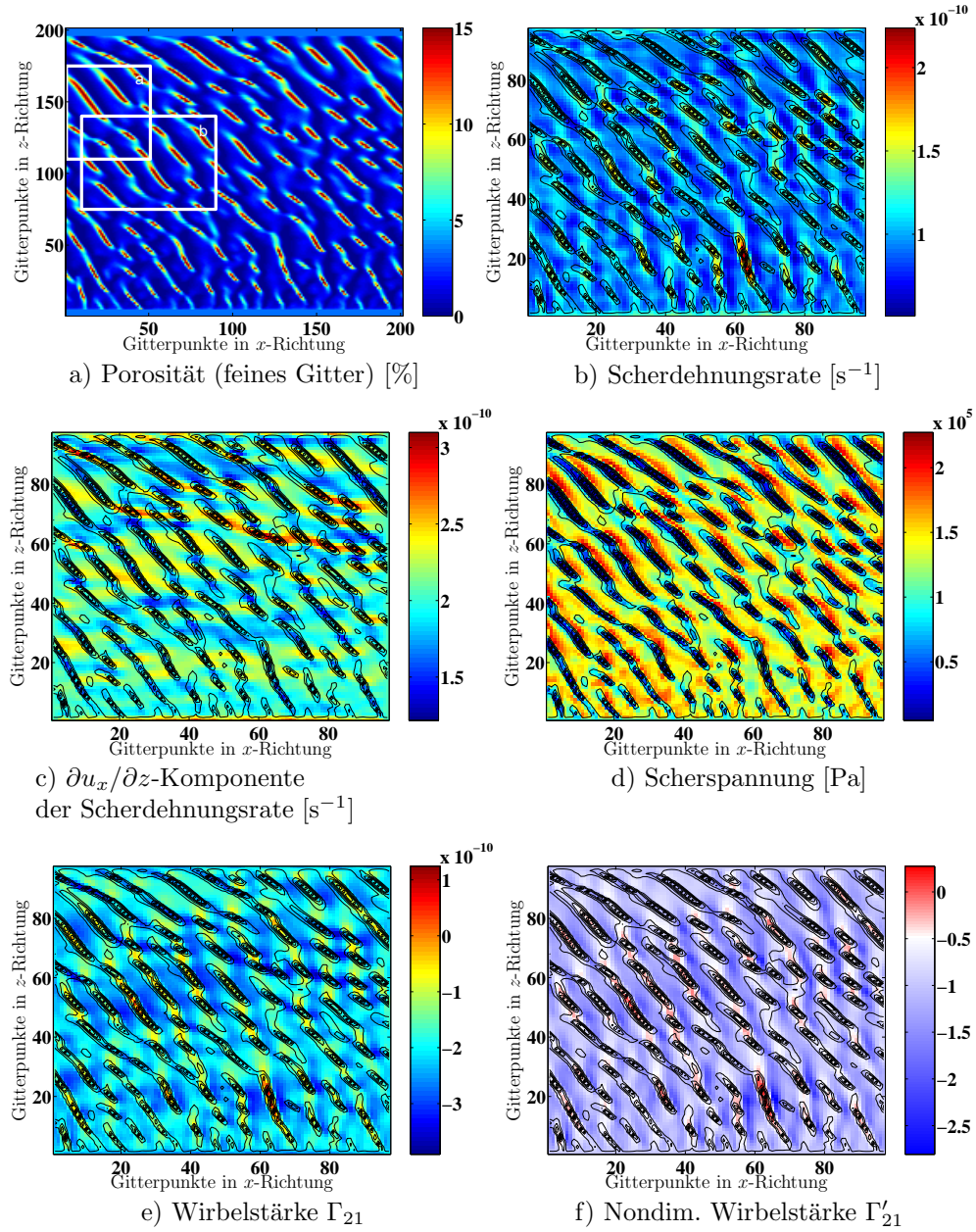


Abbildung 6.27. Detaillauswertung I der zufälligen Porositätsverteilung ($ES, \dot{\epsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)

Die Porosität ist auf einem doppelt so feinen Gitter, wie es die anderen Abbildungen aufweisen, dargestellt (vgl. Abschnitt 6.3). Der Bereich a der Abbildung 6.27.a zeigt das Gebiet, welches in Abbildung 6.29.a dargestellt ist, der Bereich b, das der Abbildung 6.29.b.

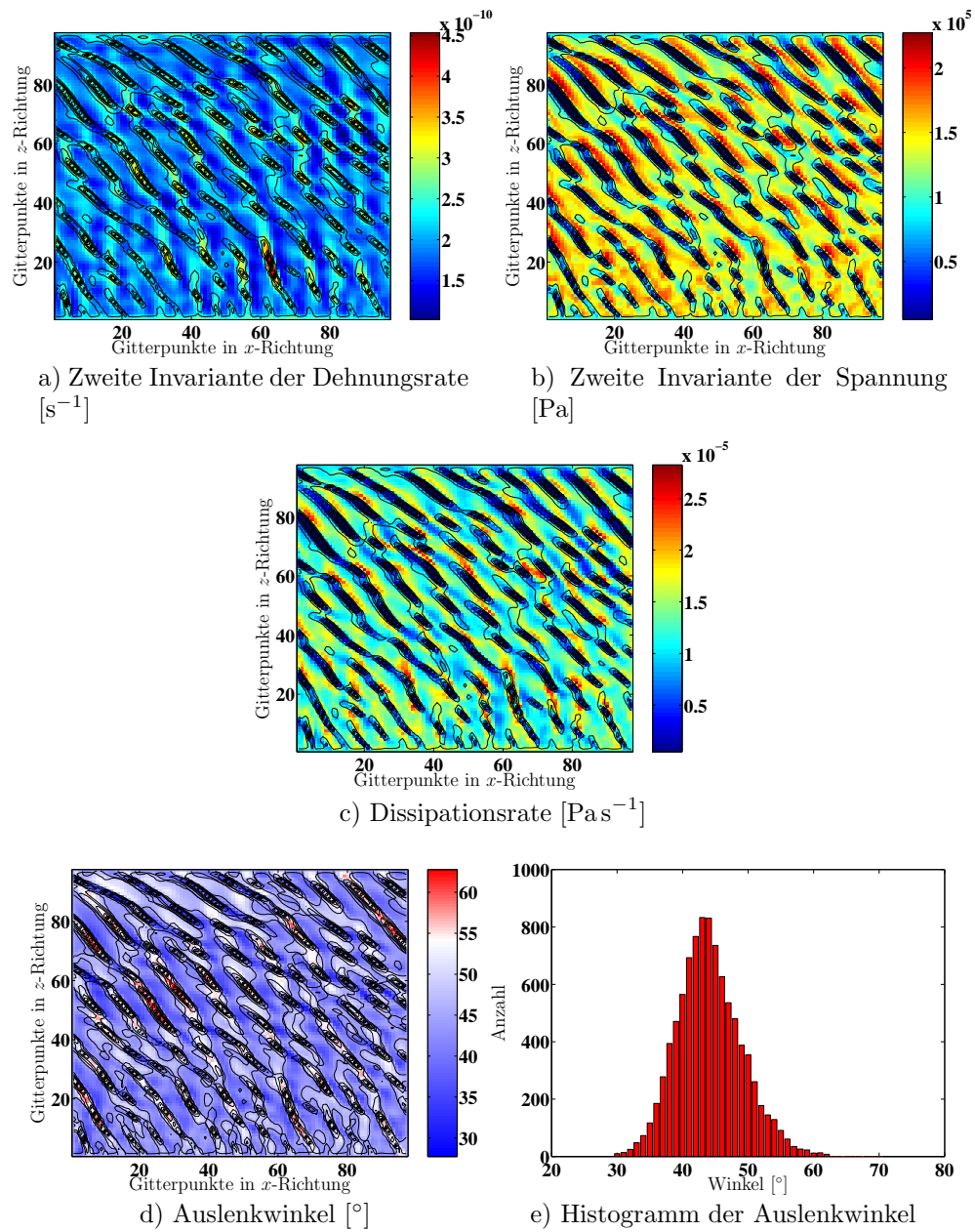


Abbildung 6.28. Detailauswertung II der zufälligen Porositätsverteilung ($ES, \dot{\epsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)

achtet werden. Die Spannung ist in der harten Matrix fokussiert, während die Schmelzlinsen eine erniedrigte Spannung aufweisen, was als Indiz genommen werden kann, dass in der Matrix ein höherer Druck herrscht, als in den Schmelzlinsen.

Ein weiterer interessanter Effekt kann bei der normierten Wirbelstärke Γ'_{21} (Abb. 6.27.f) beobachtet werden:

Offensichtlich herrscht zwischen zwei übereinander liegenden Linsen aufgrund der „book shelf“-Rotation keine bis zu eine gegen den Uhrzeigersinn gerichtete, Rotation (rot) und zwischen zwei benachbarten, aber leicht vertikal versetzten Linsen, eine mit dem Uhrzeigersinn gerichtete Rotation (blau), was zu einer typischen Kreuzverteilung der Wirbelstärke um eine Schmelzlinse führt.

Diese unterschiedlichen Rotationsrichtungen beeinflussen zwei Prozesse:

Die initiale Bildung von Kanälen und das weitere Verhalten der Kanäle bei anhaltender Dehnung. Die Bildung von Kanälen beginnt mit zwei Linsen, die mit einer Auslenkung von 45° nebeneinander liegen, wobei die linke etwas nach oben hin verschoben ist. Eine Betrachtung der Wirbelstärke (Abb. 6.27.f) zeigt nun deutlich einen zwischen diesen beiden Linsen liegenden blauen Bereich, in dem also eine bevorzugte Drehung im Uhrzeigersinn stattfindet. Dies führt dazu, dass der rechte untere Teil der linken Linse, sowie der linke obere Teil der rechten Linse in die Horizontale gedreht werden, wodurch sich diese beiden Linsen verbinden können (Abb. 6.29.a). Haben sich die Linsen verbunden, tritt, bedingt durch die unterschiedlichen Geschwindigkeiten, ein Überholprozess der oberen Linse gegenüber der unteren auf (Kap. 6.8.2), wodurch sie wieder zerrissen werden. Jedoch versuchen die Linsen, ihre Verbindung so lange wie möglich beizubehalten. Hierdurch kehrt sich ihre Drehrichtung um, und die aneinander grenzenden Linsenenden verdrehen sich nun gegen den Uhrzeigersinn und bilden, obwohl die obere Linse die untere zur Hälfte überholt hat, immer noch einen Kanal (Abb. 6.29.b). Beide Prozesse führen dazu, dass sich die ursprünglichen, elliptischen Schmelzlinsen „S“-förmig verformen. Diese Strukturen treten, wie hier, häufig in langen Bändern auf und bilden sogenannte „en-échelon arrays“. Detaillierte Untersuchungen solcher Arrays sind unter anderem in Hancock (1972), Beach

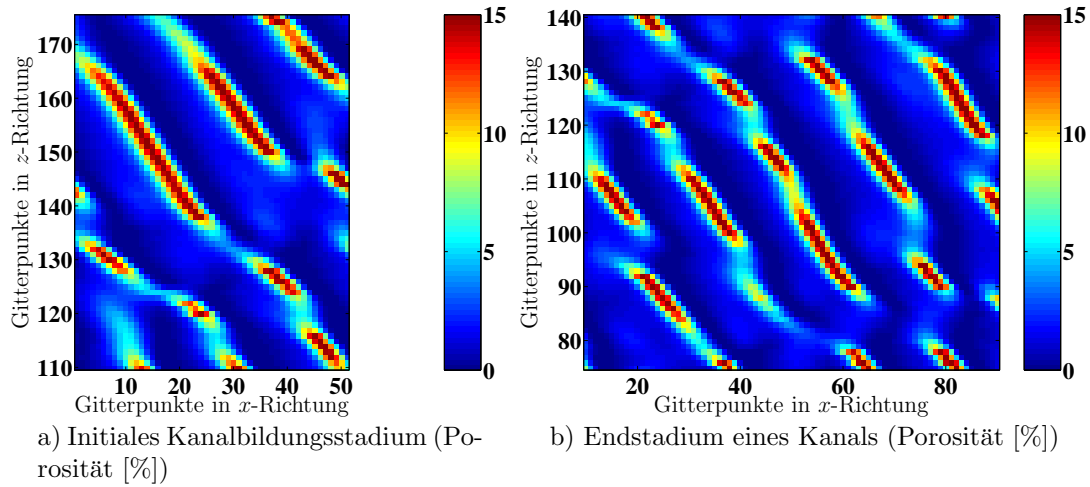


Abbildung 6.29. Prozess der Kanalbildung in zwei Stadien

Abb. 6.29.a vergrößert den durch „a“ gekennzeichneten Bereich in der Abb. 6.27.a, Abb. 6.29.b den durch „b“ gekennzeichneten Bereich.

(1975), Olson und Pollard (1991), Smith (1999) und Becker und Gross (1999) zu finden und werden hier nicht weiter durchgeführt.

Ein weiteres Indiz einer „book shelf“-Rotation der Matrix liefert die normierte Wirbelstärke (Abb. 6.27.f): Es ist deutlich erkennbar, dass sie über den Wert -1 hinaus geht, es demzufolge Bereiche gibt, die schneller rotieren, als es die Einfache Scherung vorgibt. Dieses Phänomen ist bekannt und tritt bei heterogenen Materialien auf (Mandl, 1987). Bei solch einer Materialzusammensetzung rotiert üblicherweise das feste Material, hier die Matrix, schneller als das weiche Material, die Schmelzlinsen. Erstaunlich ist, dass in der festen Matrix ebenfalls Bereiche langsamer Matrixrotation vorkommen. Diese weißroten Matrixgebiete sind meiner Meinung nach auf den oben erklärten Prozess der Minimierung der Dissipationsrate und der hieraus resultierenden Bildung von „en-échelon arrays“ zurückzuführen.

Die Analyse der aus der Richtung der maximalen Kompressionsspannung berechneten Auslenkwinkel (Abb. 6.28.d, e) zeigt, dass in den weicheren Regionen vorwiegend Auslenkwinkel von $\gamma \geq 45^\circ$ vorherrschen, während die feste Matrix bevorzugt ein $\gamma \leq 45^\circ$ aufweist. Diese Winkelaufteilung ist ebenfalls durch die „book shelf“-Rotation zu erklären:

Die harten Bereiche werden, bedingt durch die Rotation, aufgerichtet und dabei senkrecht zur Scherebene leicht gestaucht. Diese Stauchung, welche durch Reine Scherung beschrieben werden kann, überlagert sich nunmehr der vorgegebenen einfachen Scherung, was dazu führt, dass die Richtung der maximalen Kompressionsspannung und damit auch der Auslenkwinkel kleiner als 45° sind. Die sich aufrichtenden harten Zonen verringern aufgrund der Stauchung ihren Abstand untereinander geringfügig, wodurch die weichen Bereiche senkrecht zur Grenzfläche der harten und weichen Regionen leicht zusammengedrückt werden. Dies hat zur Folge, dass sich in den weichen Regionen zwei Spannungszustände überlagern: Eine Spannung ähnlich einer Reinen Scherung mit einer maximalen Kompressionsspannung parallel zur Grenzfläche zwischen weichen und harten Bereichen und die aufgeprägte Einfache Scherung, wodurch die resultierende Richtung der maximalen Kompressionsspannung und damit ebenfalls der Auslenkwinkel größer als 45° werden. Diese außergewöhnliche Spannungsverteilung sorgt dafür, dass die durch die Einfache Scherung bedingte Aufrichtung der Kanäle verhindert wird. In Filmen ist dies ebenfalls deutlich erkennbar. Eine anfängliche Schmelzlinse zieht sich an ihrer Längsachse zusammen, während sich ihre kurze Achse verdickt, dabei orientiert sich die Linse bevorzugt in horizontaler Richtung.

An der Dissipationsrate (Abb. 6.28.c) ist in dieser Darstellung nichts außergewöhnliches festzustellen; der Energieverlust ist in der harten Matrix größer als in den weichen Schmelzlinen. Wird hingegen der zeitliche Verlauf der Dissipationsrate betrachtet (Abb. 6.30.a), so ist ersichtlich, dass sie ansteigt. Dieser Anstieg kommt daher, dass die effektive Viskosität¹³ (Abb. 6.30.b) dieses Systems ebenfalls ansteigt. Der Anstieg der effektiven Viskosität bei großen Dehnungen, beruht auf der aus Stabilitätsgründen eingeführten Randbedingung, dass das System keine höheren Porositäten als 15% aufweisen darf. Sollte die Porosität dennoch über diesen Wert ansteigen, wird dem System so viel Schmelze entzogen, bis wieder der Maximalwert erreicht wird. Durch diesen Schmelzverlust (Abb. 6.30.c) steigt gleichermaßen die Viskosität und damit auch die Dissipationsrate an. Allerdings ist auffällig, dass die Dissipationsrate auch schon bei geringeren Porositäten leicht ansteigt. Dies ist darauf

¹³über das gesamte Gebiet gemittelte Viskosität

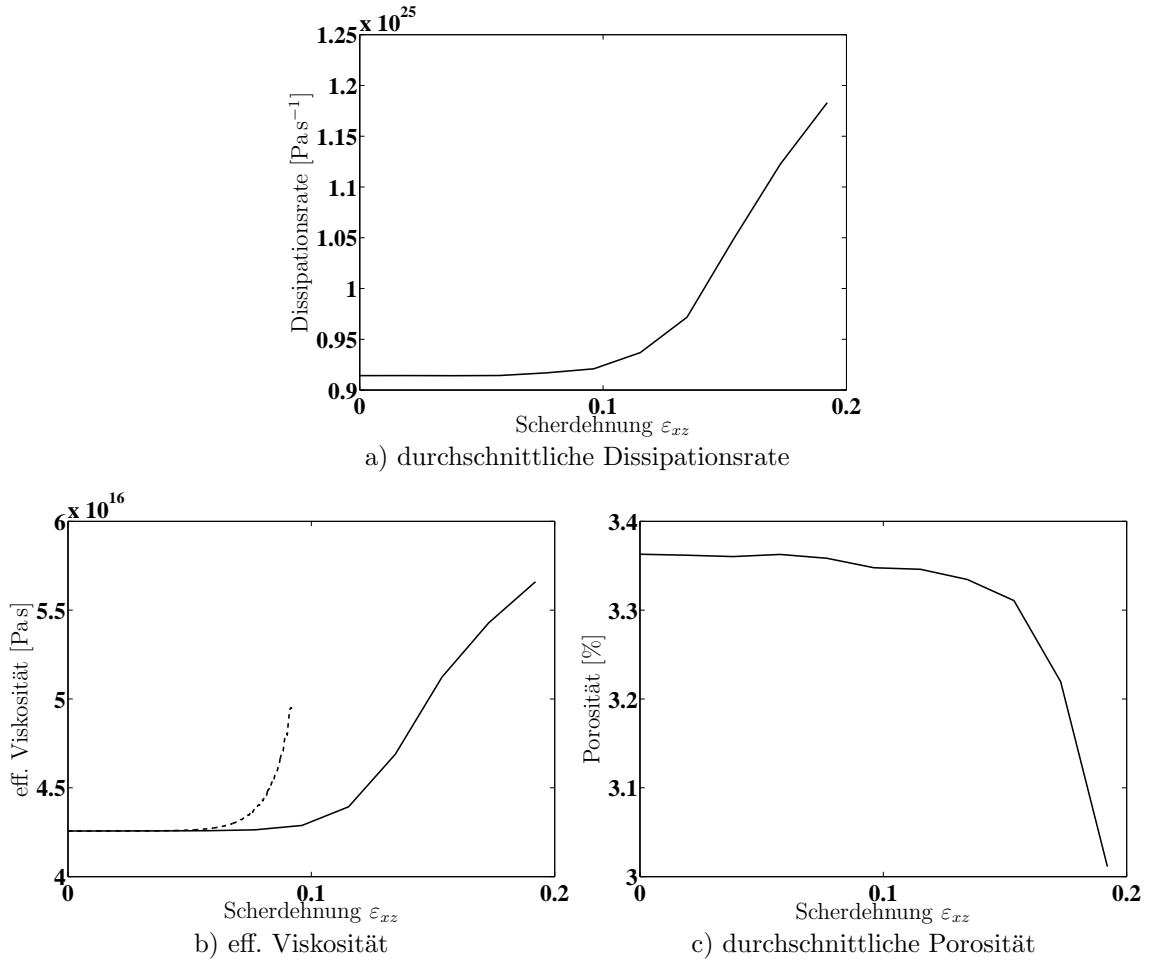


Abbildung 6.30. Prozess der Minimierung der Dissipationsrate

— eff. Viskosität dieser Arbeit

- - - theo. eff. Viskosität

zurückzuführen, dass die effektive Viskosität ebenfalls ansteigt, diesmal jedoch nicht aufgrund des Entzugs von Schmelze, sondern bedingt durch die geometrische Verteilung der Schmelze in den Kanälen. Die effektive Viskosität einer Matrix, welche eine senkrecht zur maximalen Kompressionsspannung 1D sinusförmige Verteilung der Schmelze aufweist, ist gegeben durch (Anhang D)

$$\eta_{theo,eff} = \eta_1 \left(1 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \right) + \eta_2 \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \quad (6.11)$$

$$= \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}. \quad (6.12)$$

$\eta_1 = \eta_i e^{-a_1 \varphi_1}$ Scherviskosität mit $\varphi_1 = \varphi_0 - \delta\varphi$, $\eta_2 = \eta_i e^{-a_1 \varphi_2}$ Scherviskosität mit $\varphi_2 = \varphi_0 + \delta\varphi$

Zur Verdeutlichung ist in Abbildung 6.30.a der Verlauf der theoretischen effektiven Viskosität $\eta_{theo,eff}$ in Abhängigkeit der Maximalamplitude der Porosität mit aufgetragen. Deutlich zu erkennen ist, dass die theoretische effektive Viskosität schneller anwächst, als die hier beobachtete, was gleichermaßen auch für die Dissipationsrate gelten würde. Dementsprechend kann gesagt werden, dass das System durch die Ausbildung von kleinen Schmelzlinsen, die in $\approx 45^\circ$ geneigt sind, anstelle von langen zusammenhängenden Kanälen versucht, die effektive Viskosität und damit auch die Dissipationsrate zu minimieren. Dadurch, dass die Dissipationsrate dennoch ansteigt, widerfährt dem System ein „strain-hardening“ Effekt¹⁴.

Die eben beschriebenen Prozesse verursachen eine Kanalbildung aufgrund von vertikal versetzten, sich überholenden Schmelzlinsen, die sich untereinander immer wieder verbinden und später wieder auseinander gerissen werden. Dieser Prozess erzeugt nicht nur lange, in etwa Richtung 45° verlaufende Kanäle, sondern fördert auch die Entstehung von „en-échelon arrays“. Somit konnte erfolgreich verfolgt werden, wie sich ein Kanalsystem aus vielen, einzeln verstreuten Schmelzlinsen bildet; weiterhin konnten „en-échelon arrays“ ausfindig gemacht werden. Die Untersuchung dieser Arrays könnte eine mögliche Weiterführung dieser Arbeit sein.

6.9 Untersuchungen mit vergrößerten Boxdimensionen

Die vorangegangenen Versuche mit zufälligen Schmelzverteilungen und einer Boxdimension von 201×201 Gitterpunkten bilden aufgrund der aufgeprägten Scherung einen „book shelf“-Mechanismus aus. Um zu untersuchen, ob dieser Mechanismus aufgrund der kinematischen Randbedingungen oder zu kleiner Boxdimensionen erfolgt, wurden die Versuche unter den Bedingungen des vorherigen Kapitels, aber mit der achtfachen Boxlänge in x -Richtung wiederholt. Hierdurch kann für ein kleines, auf die Boxmitte zentriertes Messgebiet erreicht

¹⁴strain-hardening: Ein System wird mit zunehmender Dehnung härter (Lowrie, 2003).

werden, dass störende Randeffekte, die durch die aufgeprägte Stromfunktion auftreten können, weitgehend abgefallen sind.

Außerdem wurde im Unterschied zu den vorherigen Experimenten am linken und am rechten Rand eine Zone erniedrigter Viskosität eingeführt. Hierdurch sollten die fest vorgegebenen kinematischen Randbedingungen und damit gleichermaßen auch die dynamischen von der eigentlichen Messbox entkoppelt werden (Spannungsfreiheit am linken und rechten Rand der Messbox, kinematische Randbedingung am oberen und unteren Rand). Der Grund dafür ist, dass sich dadurch am Rand der Messbox in einem gewissen Rahmen beliebige kinematische bzw. dynamische Bedingungen einstellen können. Diese flexible Gestaltung der Randbedingung an der Messbox ist notwendig, um nicht von Beginn eine Ausbildung von Strukturen, die andere als die vorgeschriebenen Randbedingungen brauchen, zu (be-/)verhindern.

Darüber hinaus wurde anstelle des roten Rauschens ein angenähertes weißes Rauschen verwendet (Powerspektrum 6.23). Dies liegt darin begründet, dass das rote Rauschen schon sehr frühzeitig keine Gleichausrichtung der Auslenkwinkel der Kanäle aufweist. Dies könnte daran liegen, dass in dem roten Rauschen evtl. doch eine Vorzugsrichtung vorhanden ist. Um dies weitestgehend auszuschließen, wurde ein angenähertes weißes Rauschen verwendet, welches, wie im Powerspektrum ersichtlich ist, wesentlich weniger Energie in den niedrigeren Wellenzahlen aufweist.

Die weiteren Parameter dieser Studie sind:

$\varepsilon_{max} \approx 1.15$, $\dot{\varepsilon}_{xz} = 6.0 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$, $Rtn = 0.5$, $AZ = 0$ und die Rheologie von McKenzie (Glg. 2.22). In Abbildung 6.31 sind vollständigkeithalber die Anfangsverteilung und das Endstadium dieser Versuchsreihe im Ganzen dargestellt. Da diese Abbildungen allerdings keine genaue Betrachtung der Ergebnisse erlauben, wurde eine vergrößerte Abbildung des Gebietes $(nx, nz) = (600 - 800, 1 - 201)$ hinzugefügt (Abb. 6.32).

Diese Experimente zeigen vergleichbare Kanalverteilungen und Ergebnisse in der Detaildarstellung (Abb. 6.33.a-6.34.e), wie zuvor die der kleinen Box (Kap. 6.8.1 und 6.8.2), so dass

eine Auswertung zu denselben Schlüssen führen würde wie in Kapitel 6.8.2 und hier nicht weiter verfolgt wird.

Anzumerken ist, dass sich in Abbildung 6.32.b, deutlicher als in Abbildung 6.24, ein Auslenkwinkel von $60^\circ - 70^\circ$, wie ihn Holtzman *et al.* (2003) beobachteten, einstellt. Diese Auslenkung tritt hier ebenfalls in einem sehr frühen Stadium der Dehnung auf. Dass diese Auslenkung hier so deutlich auftritt, liegt an den veränderten Rand- bzw. Boxbedingungen. Diese entsprechen, da sie am linken und rechten Rand Zonen erniedrigter Viskosität aufweisen, eher den experimentellen Randbedingungen von Holtzman *et al.*. Bei ihnen war die Probe ebenfalls nur an der Ober- und Unterseite durch die beiden auf die Probe wirkenden Stempel eingeschränkt. Da diese Experimente eine 3 – 4 mal geringere Dehnungsrate aufweisen als die vorherigen und sich im Anfangsstadium deutlicher die von Holtzman *et al.* beobachteten Kanäle ausbilden, wird die Vermutung aus Abschnitt 6.8.1 bekräftigt, dass die Kanalisierungsinstabilität in den Experimenten von Holtzman *et al.* langsamer ablief, und sie deswegen nicht bis zu den Endstrukturen, wie sie in den nachfolgenden Abbildungen ersichtlich sind, gelangten.

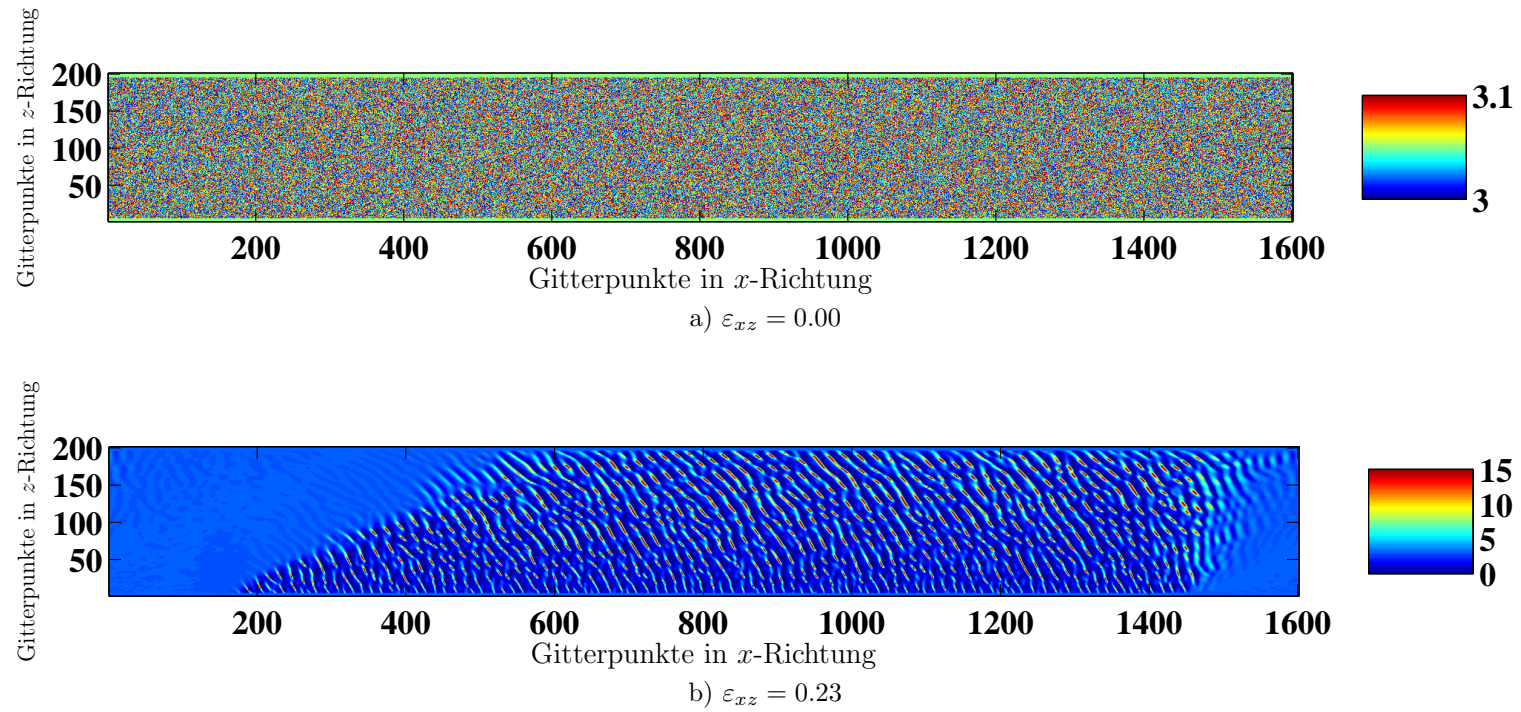


Abbildung 6.31. Porositätsverteilung [%] der Scherdehnungsstudie mit den Boxdimensionen $(nx, nz) = (1 - 1601, 1 - 201)$.

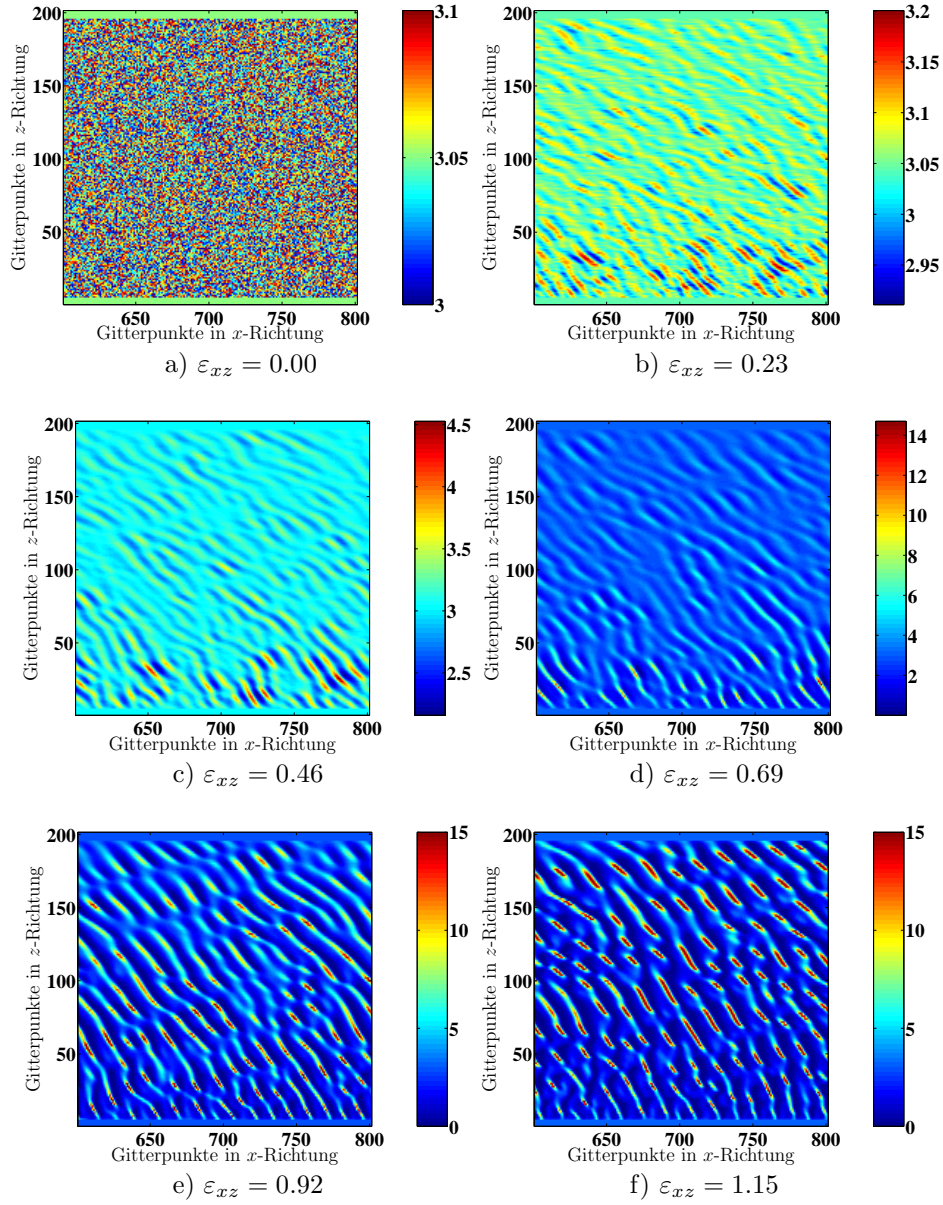


Abbildung 6.32. Porositätsverteilung [%] der Scherdehnungsstudie mit den Boxdimensionen $(nx, nz) = (1 - 1601, 1 - 201)$, wobei nur ein Teil des Gesamtgebietes dargestellt ist ($nx = 600 \dots 800 \times nz = 1 \dots 201$).

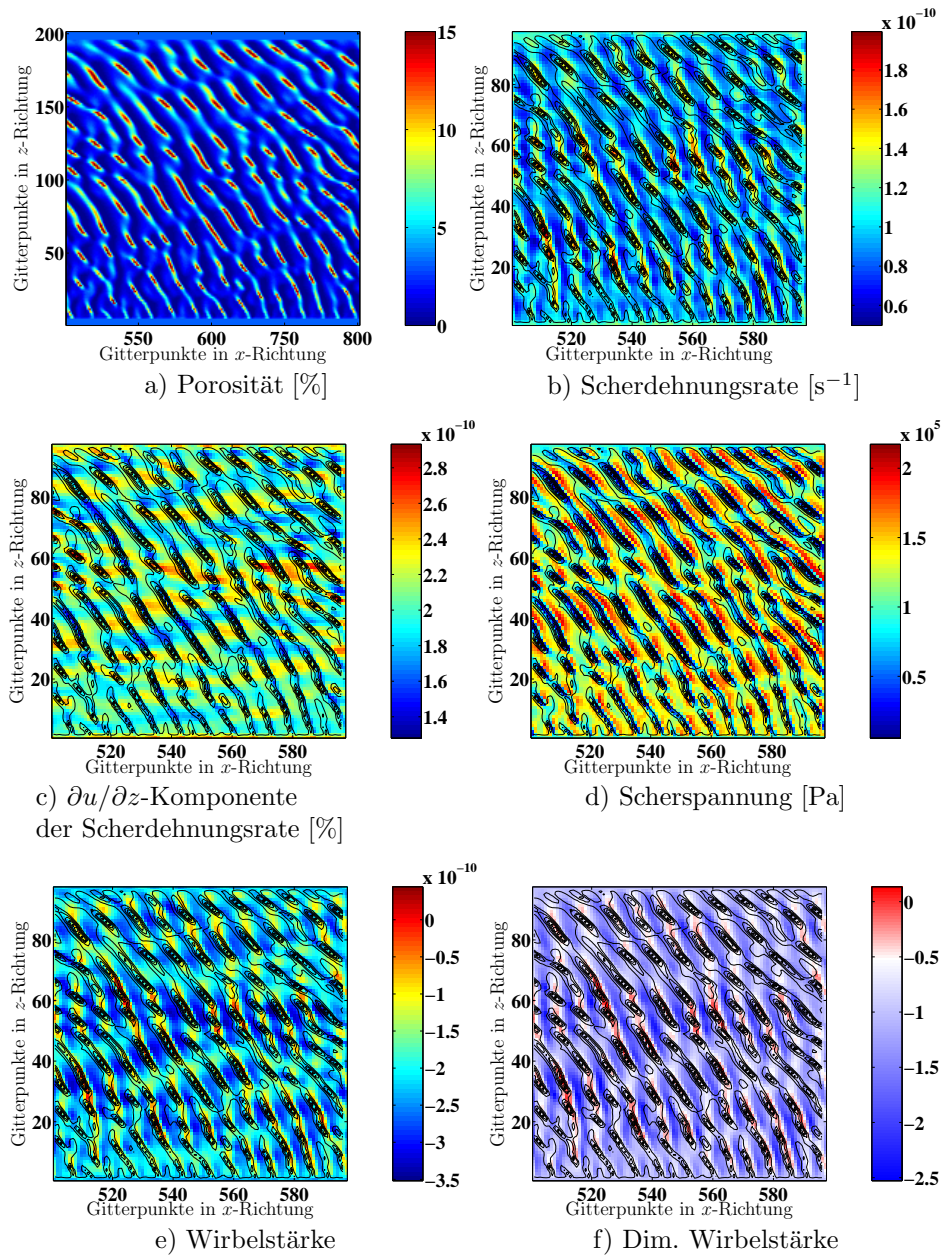


Abbildung 6.33. Detailauswertung I der Scherdehnungsexperimente mit vergrößerten Boxdimensionen

Diese Ausschnitte stammen der Abbildung 6.31 bei $n_x = 500 - 600, n_z = 1, 201$

6.10 Parameterstudie: Einfache Scherung mit Auftrieb

In dieser Studie wird der Einfluss des Auftriebs aufgrund des Dichteunterschiedes zwischen Matrix und Schmelze auf die Kanalisierungsinstabilität untersucht. Der Auftrieb kann in

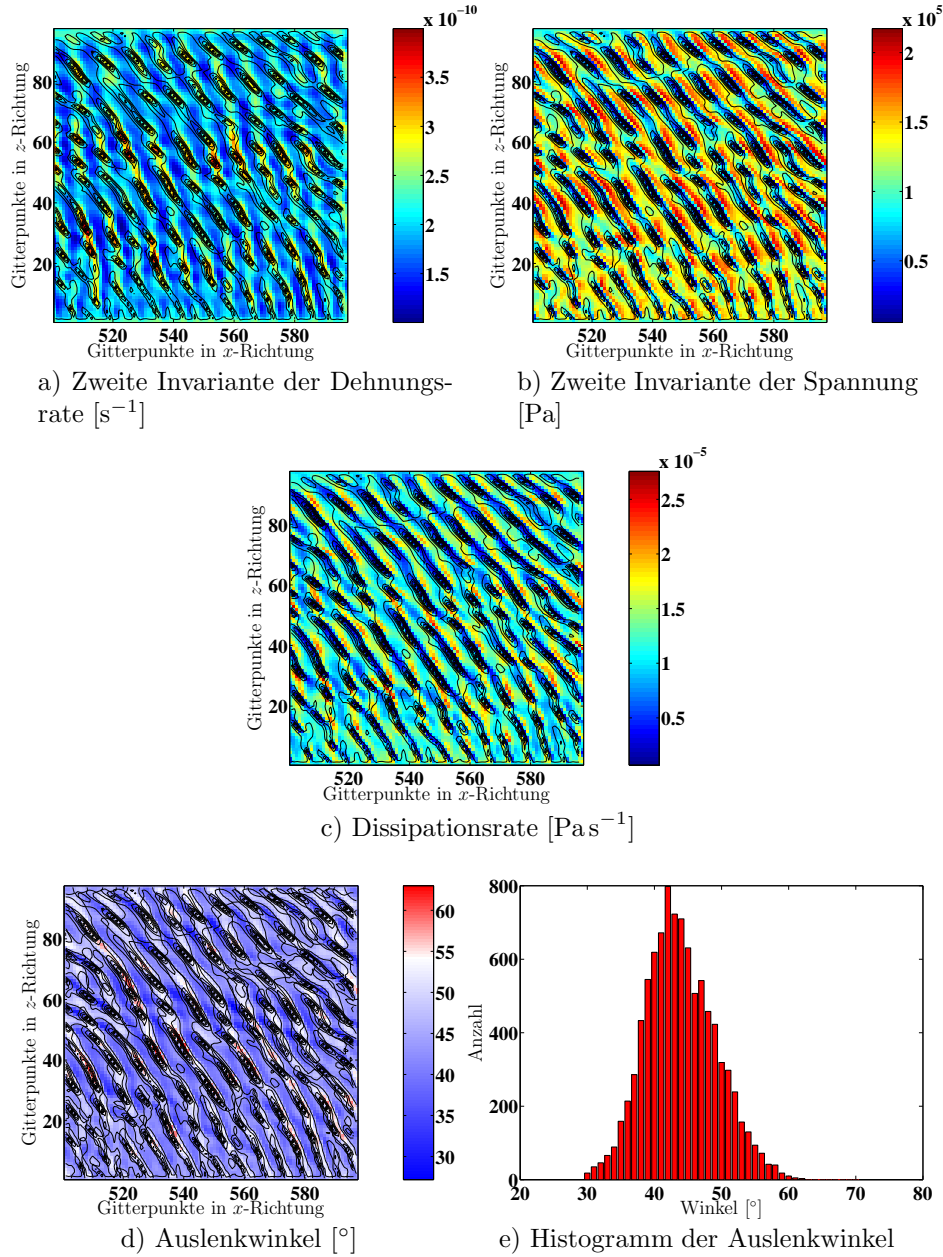


Abbildung 6.34. Detailauswertung II der Scherdehnungsexperimente mit vergrößerten Boxdimensionen

Diese Ausschnitte entstammen der Abbildung 6.31 bei $n_x = 500 - 600, n_z = 1, 201$

FDCON durch die dimensionslose Auftriebszahl AZ (Glg. 2.33, S. 40) beeinflusst werden. In den Rechnungen variiert AZ in einem Bereich von $0.008 - 0.280$. Dies entspricht mit den hier gewählten Parametern¹⁵ in etwa einem Dichtekontrast zwischen Schmelze und Matrix von $\delta\rho = 50 - 1600 \text{ kg m}^{-3}$. Realistische Dichtekontraste für die Erde sind $\delta\rho = 50 - 400 \text{ kg m}^{-3}$. Die Experimente mit höheren Kontrasten dienen lediglich dazu, den Einfluss des Auftriebs auf die Kanalisierungsinstabilität zu untersuchen. Um diesen Einfluss weiterhin zu analysieren, variiert Rtn in einem Bereich von $0.5 - 5$ und die Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{xz}$ in einem Bereich von $3.0 \cdot 10^{-12} - 10^{-10} \text{ s}^{-1}$. Als initiale Porositätsverteilung dient ein buntes Rauschen mit $\varphi = 3 \pm 0.25\%$ (Abb. 6.6.d, S. 81). Die einzelnen Versuchskombinationen sind in Tabelle 6.2 und 6.3 zusammengestellt.

$\delta\rho \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$	AZ	Dehnungsrate $[\text{s}^{-1}]$	Dehnung	Abbildung
200	0.035	$3.0 \cdot 10^{-12}$	0.28	–
200	0.035	$1.25 \cdot 10^{-11}$	0.8	6.35.a
200	0.035	$1.75 \cdot 10^{-11}$	0.8	6.35.b
200	0.035	$2.5 \cdot 10^{-11}$	0.8	6.35.c
200	0.035	$5.0 \cdot 10^{-11}$	0.8	6.35.d
200	0.035	$7.5 \cdot 10^{-11}$	0.8	6.35.e
200	0.035	10^{-10}	0.8	6.35.f

Tabelle 6.2. Parameterkombinationen für die Versuchsreihe:
 ES , $AZ = 0.035$, $Rtn = 0.5$ und $\varepsilon_{xz} = \text{variabel}$

$\delta\rho \text{ [kg m}^{-3}\text{]}$	AZ	Rtn	Dehnung
50	0.008	0.5, 0.75, 1, 5	0.8
100	0.017	0.5, 0.75, 1, 5	0.8
150	0.026	0.5, 0.75, 1, 5	0.8
200	0.035	0.5, 0.75, 1, 5	0.8
400	0.070	0.5, 0.75, 1, 5	0.8
800	0.141	0.5, 0.75, 1, 5	0.8
1200	0.210	0.5, 0.75, 1, 5	0.8
1600	0.280	0.5, 0.75, 1, 5	0.8

Tabelle 6.3. Parameterkombinationen für die Versuchsreihe:
 ES , $AZ = \text{variabel}$, $Rtn = \text{variabel}$ und $\varepsilon_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$

¹⁵ $a = 0.001 \text{ mm}$, $b = 648$, $n = 3$, $\varphi_0 = 3\%$, $\eta_f = 0.77 \text{ Pa s}$, $h = 1000 \text{ m}$, $\dot{\varepsilon}_0 = 10^{-10}$, $g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$

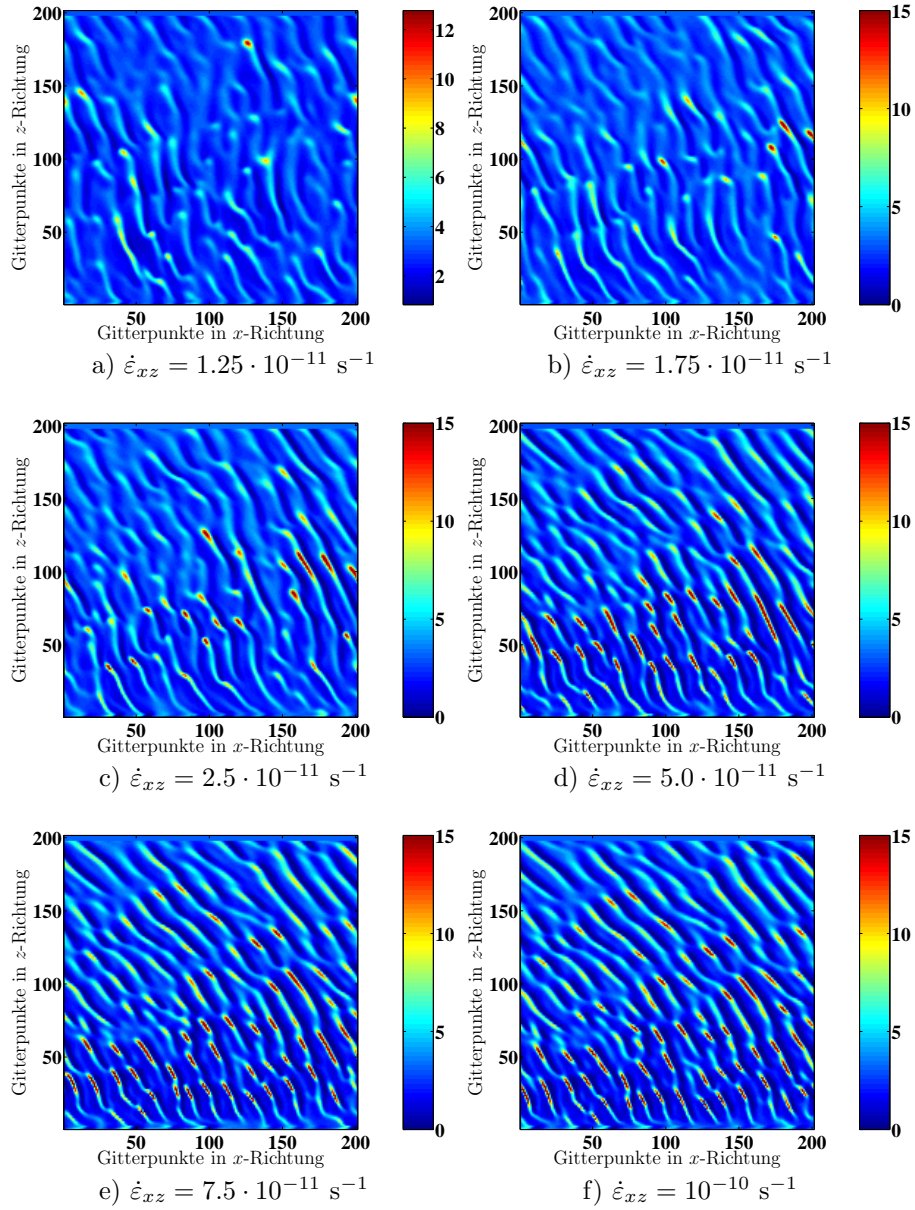


Abbildung 6.35. Porositätsverteilung [%] der Einfachen Scherungsexperimente mit Auftrieb bei $\varepsilon_{xz} \approx 0.8$ mit $AZ = 0.035$, $Rtn = 0.5$ und $\dot{\varepsilon}_{xz} = \text{variabel}$

Um einen ersten Eindruck der entstandenen Strukturen zu erhalten, werden die Experimente aus Tabelle 6.2, bis auf das Experiment mit $\dot{\varepsilon} = 3.0 \cdot 10^{-12} \text{ s}^{-1}$, bei einer einzigen Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} \approx 0.8$ dargestellt (Abb. 6.35). Es ist ersichtlich, dass sich um so stärkere und besser ausgebildete Kanalstrukturen, welche vergleichbar mit denen aus den

vorangegangenen Kapiteln sind, mit einer Auslenkung von $\approx 45^\circ$ ausbilden, je größer die Dehnungsrate ist.

Dieses Verhalten ist auf den Auftrieb zurückzuführen, da sich nach Gleichung 3.8 bei ein und derselben Dehnung die gleichen Strukturen gebildet haben sollten. Dies zeigen ebenfalls numerische Experimente mit einer Aufstiegszahl von $AZ = 0$, welche, da sie alle das Gleiche zeigen, hier nicht dargestellt sind. Da die am besten ausgebildeten Strukturen bei zunehmender Dehnungsrate auftreten, also der Auftrieb weniger „Zeit“ hat, auf das System zu wirken, kann geschlossen werden, dass sich der Auftrieb negativ auf das Anwachsen der Kanalporosität auswirkt. Diese negative Auswirkung des Auftriebs auf die Ausbildung eines Kanalsystems erwähnt Stevenson (1989) ebenfalls.

Um dieses Verhalten besser zu studieren, wurde eine Versuchsreihe mit den in Tabelle 6.3 aufgelisteten Parametern durchgeführt. In den Abbildungen 6.36.a bis 6.37.d ist deutlich zu erkennen, dass sich die Struktur der Kanäle bei zunehmendem Auftrieb drastisch verändert. Während anfänglich (Abb. 6.36.a bis 6.36.d) noch eindeutig Kanalstrukturen zu erkennen sind, verwandeln sich diese Kanäle in zusehends kreisförmige Strukturen, welche beginnen, ähnlich wie Porositätswellen, aufzusteigen.

An dieser Versuchsreihe ist deutlich zu erkennen, dass sich mit zunehmendem AZ die Struktur der Kanäle verändert. Ein Kanal ist dadurch gekennzeichnet, dass seine Perturbationsporosität um das e -fache angewachsen ist. Für die hier dargestellten Bilder gilt dementsprechend mit $\varphi = 3.0\% \pm 0.1\%$, dass es sich, liegt die Porosität über $\varphi = 3.27\%$, um eine Kanalstruktur handelt. Ein Maß für diesen Strukturwandel und zugleich ein Maß dafür, wie effektiv die ausgebildete Struktur Schmelze aufsteigen lässt, gibt die horizontale Kanalüberschuss-Durchflussmenge Q_{kanal} an (Spiegelman *et al.*, 2001), mit

$$Q_{kanal} = \bar{u}_{f,z} \left(\frac{P_f}{P_a} - 1 \right). \quad (6.13)$$

$\bar{u}_{f,z}$ gemittelte vertikale Schmelzdurchflussmenge, P_f vertikale Kanalschmelzdurchflussmenge in Prozent, P_a prozentualer Anteil der Kanäle an der Gesamtfläche

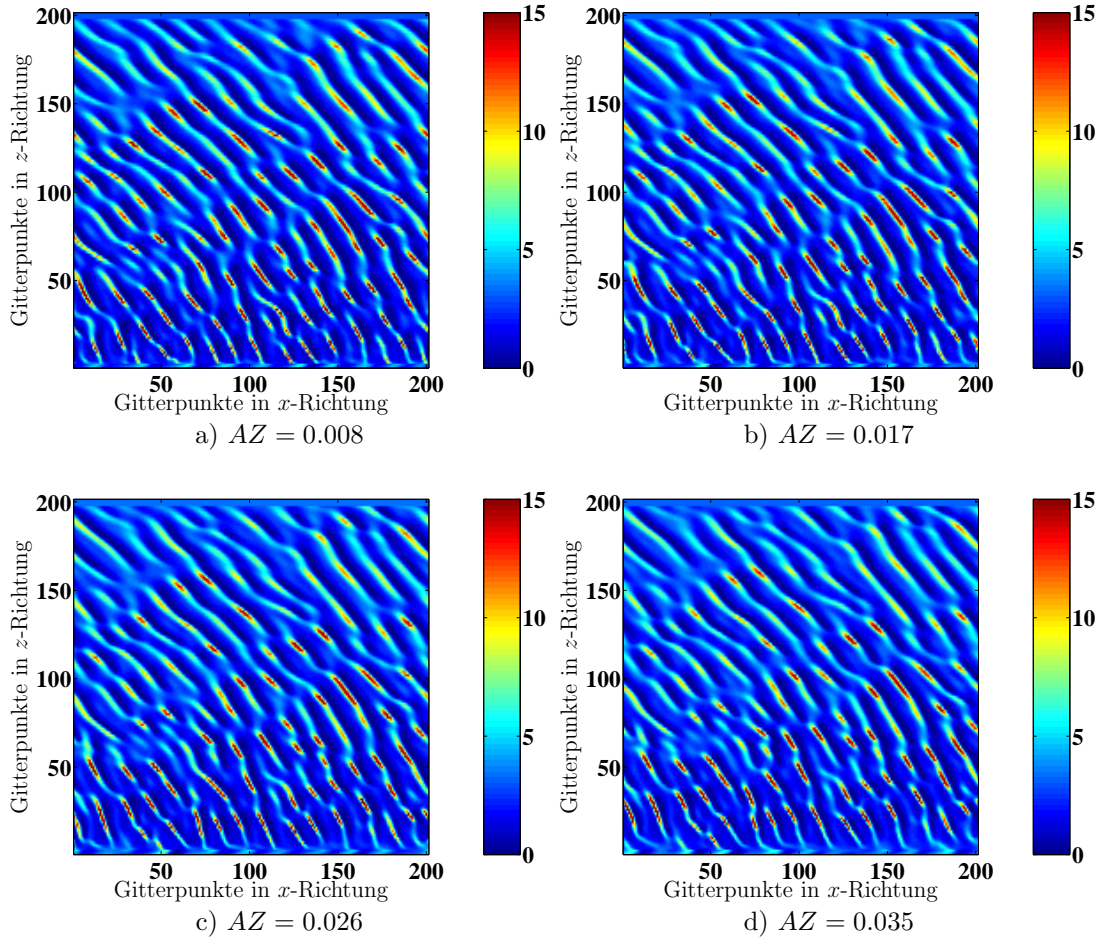


Abbildung 6.36. Porositätsverteilung [%] der Einfachen Scherungsexperimente mit unterschiedlichem Auftrieb und konstanter Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ und einem $Rtn = 0.5$ bei einer konstanten Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} \approx 0.8$

Ist $P_f \approx P_a$, also $Q_{kanal} = 0$, so findet kein überschüssiger Fluss in einem Kanal statt, was gleichbedeutend damit ist, dass, obwohl eine Kanalbildung stattgefunden hat, hierdurch keine effektivere Schmelzextraktion stattfindet. In den Abbildungen 6.38 und 6.39 ist für ausgewählte Wertepaare aus den Tabellen 6.2 und 6.3 die Durchflussmenge in Abhängigkeit zunächst von der Scherdehnung ε_{xz} und des weiteren von Rtn und AZ dargestellt. Deutlich zu erkennen ist, dass die Überschuss-Durchflussmenge in Abbildung 6.38 ab einer Dehnung von $\varepsilon_{xz} \approx 0.4$ exponentiell anwächst, wobei ein stärkeres Anwachsen bei einer Erhöhung von AZ und einer Erniedrigung von Rtn stattfindet. Dasselbe Verhalten ist in Abbildun-

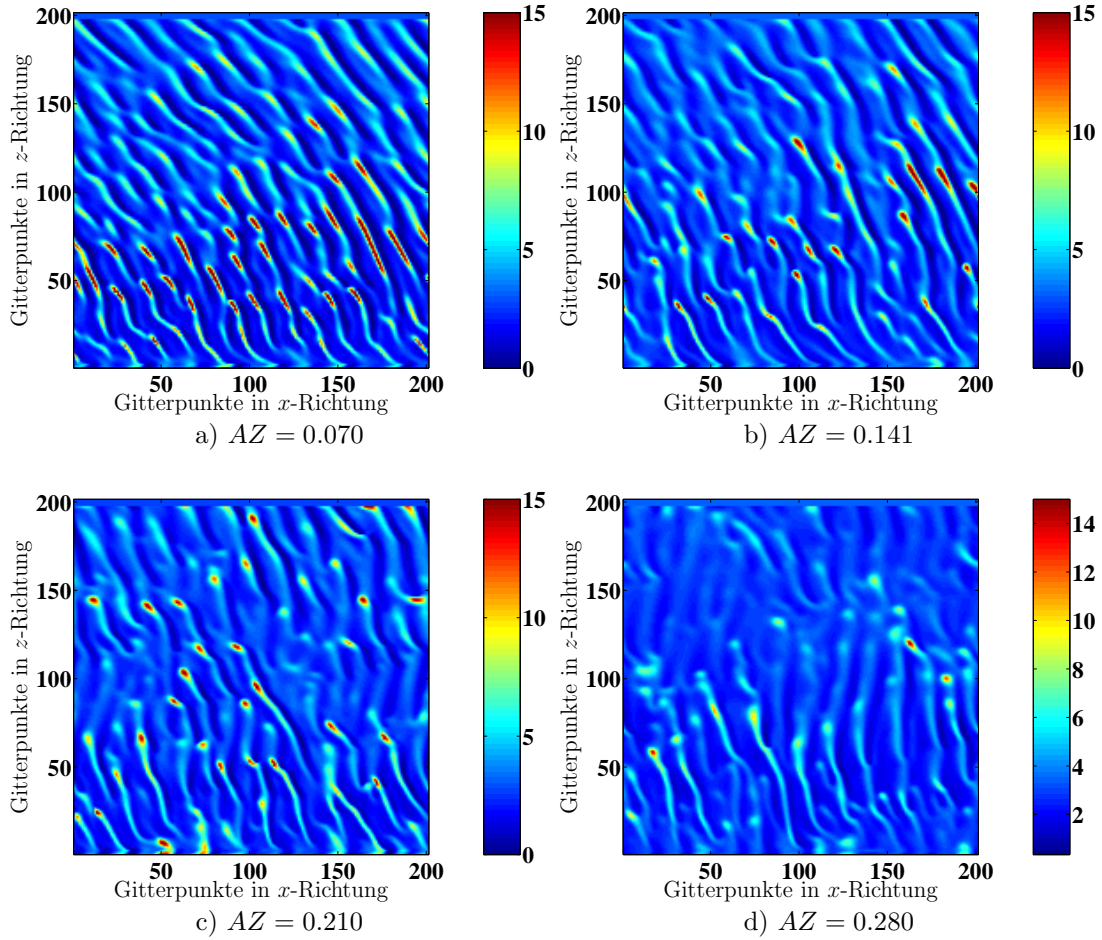


Abbildung 6.37. Porositätsverteilung [%] der Einfachen Scherungsexperimente mit unterschiedlichem Auftrieb und konstanter Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ und einem $Rtn = 0.5$ bei einer konstanten Scherdehnung von $\varepsilon_{xz} \approx 0.8$

gen 6.39.a zu erkennen, der Durchfluss Q_{kanal} ist für das kleinste Rtn und größte AZ am stärksten. Wird zusätzlich der prozentuale Anteil der von Kanälen bedeckten Fläche betrachtet (Abb. 6.39.b), so ist erkennbar, dass sich generell, je kleiner Rtn und um so größer AZ ist, die von Kanälen in Anspruch genommene Fläche P_f verringert. Hieraus kann geschlossen werden, dass sich der Extraktionsprozess der Schmelze grundlegend verändert, je kleiner Rtn und um so größer AZ wird. Dieses Verhalten ist ebenfalls gut in den Abbildungen 6.36.a bis 6.37.d verdeutlicht - mit steigendem AZ nimmt die Anzahl von Kanälen bzw. von Bereichen, die eine erhöhte Porosität aufweisen, ab. Anstelle der Extraktion der

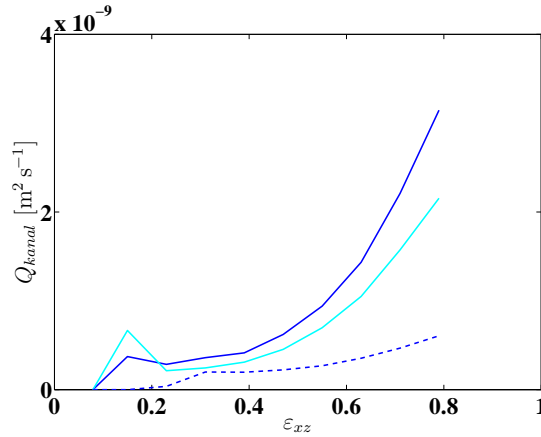


Abbildung 6.38. Die horizontale Kanalüberschuss-Durchflussmenge Q_{kanal} in Abhängigkeit von der Scherdehnung ε_{xz} bei einer konstanten Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$

- $AZ = 0.035, Rtn = 0.5$ - - $AZ = 0.035, Rtn = 0.75$
- $AZ = 0.026, Rtn = 0.5$

Schmelze in Kanälen erfolgt sie mit zunehmendem AZ immer mehr in rundlichen Strukturen (vergleichbar mit 2D Solitonen), die, ohne ihre Form zu verändern, in einem einmal angelegten Kanal bis zu dessen oberen Ende aufsteigen und dort stagnieren, um dann zu einem späteren Zeitpunkt weiter aufzusteigen. Dieses Verhalten ist anhand von Filmen festgestellt worden. In Abb. 6.37.c ist bei den Gitterkoordinaten $x = 5 - 60$ und $z \approx 148$ ein solcher Stagnationspunkt erkennbar, weiterhin kann bei $x = 100 - 110$ und $z = 1 - 100$ ein Kanal ausgemacht werden, der drei solcher rundlichen Strukturen führt. Die zwei unteren Strukturen werden weiter, dem Kanal folgend, aufsteigen, bis sie sich mit der am oberen Ende befindlichen, dritten Struktur vereinen.

Um diese Interaktion unter realistischen Bedingungen weiter zu erforschen, wurde eine Langzeitstudie bei einer Scherdehnungsrate von $\dot{\varepsilon}_{xz} = 1.25 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1}$ sowie $Rtn = 0.5$ und $AZ = 0.035$, was einem Dichteunterschied von $\delta\rho \approx 200 \text{ kg m}^{-3}$ entspricht, durchgeführt (Abb. 6.40, Rheologie von McKenzie Glg. 2.22).

Die Vermutung einer Interaktion zwischen der Kanalisierungsinstabilität und dem Aufstieg von Schmelze wird eindrucksvoll bestätigt. Anstelle der elliptischen Strukturen, die aus den Abbildungen 6.26 und 6.32 bekannt sind, bilden sich lange, zusammenhängende Kanäle

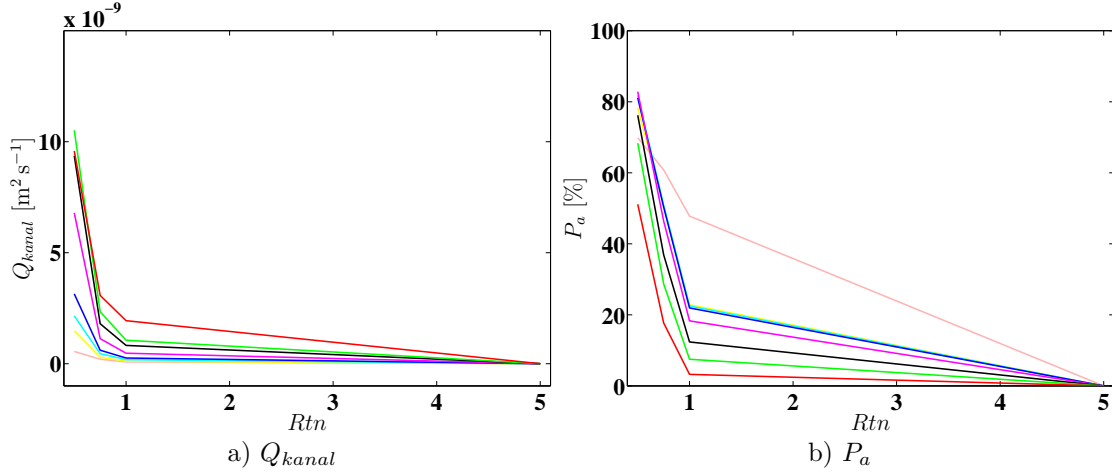


Abbildung 6.39. Der horizontale Kanalüberschuss-Durchflussmenge Q_{kanal} in Abhängigkeit von Rtn und AZ bei einer konstanten Dehnungsrate von $\dot{\epsilon}_{xz} = 10^{-10} s^{-1}$ und einer Scherdehnung von $\epsilon_{xz} \approx 0.8$, sowie der prozentuale Anteil von Kanälen P_a am Gesamtgebiet.

— $AZ = 0.280$	— $AZ = 0.210$	— $AZ = 0.141$
— $AZ = 0.070$	— $AZ = 0.035$	— $AZ = 0.026$
— $AZ = 0.017$	— $AZ = 0.008$	

aus, die an ihrem oberen Ende eine verdickte, kugelförmige Ansammlung von Schmelze aufweisen.

Das Verhalten der aufsteigenden Schmelze kann folgendermaßen beschrieben werden: Anfänglich wird sich die Schmelze aufgrund der Kanalisierungsinstabilität in Kanälen sammeln. Da die Kanäle eine inhomogene Schmelzverteilung aufweisen, werden Schmelz-linsen mit einer erhöhten Porosität schneller aufsteigen als andere. Weiterhin ist bekannt, dass sich bei einem Aufstieg von Schmelze aus einer beliebigen Schmelzverteilung ein 2D Soliton bzw. eine Porositätswelle ausbilden wird, da diese ein optimales Verhältnis von Schmelzverteilung zu Aufstiegsgeschwindigkeit aufweisen (Schmeling, 2000). Die durchschnittliche dimensionslose Aufstiegsgeschwindigkeit¹⁶ der hier beobachteten Solitonen beträgt $w'_{soli} \approx 0.23$.

¹⁶ $w'_{soli} = \frac{\Delta z}{h \Delta t'}$

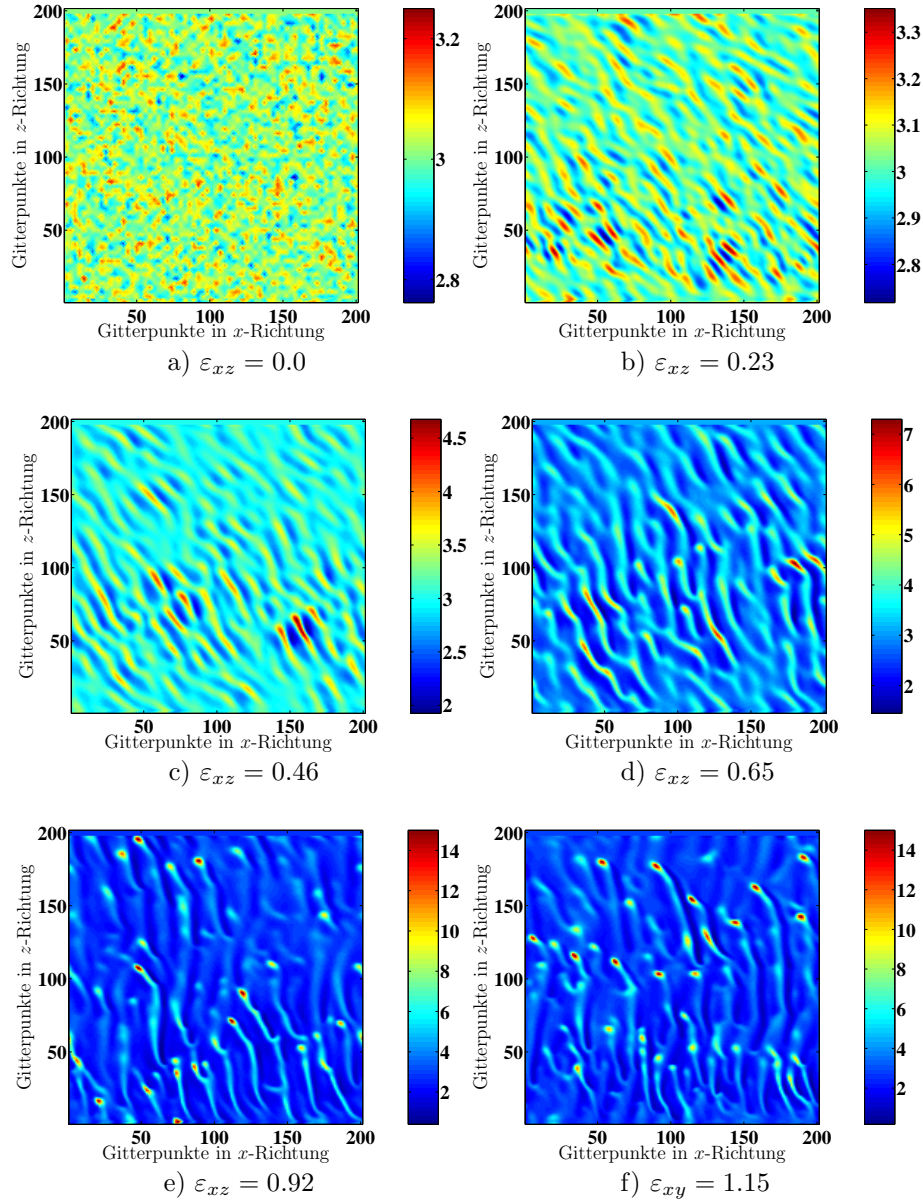


Abbildung 6.40. Porositätsverteilung [%] der Einfachen Scherungsexperimente mit Auftrieb bei $\dot{\varepsilon} = 1.25 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}$, $AZ \geq 0.035$ und $Rtn = 0.5$

Diese Geschwindigkeit stimmt mit denen aus Abbildung¹⁷ 4 von Schmeling (2000) bei einer Porositätsamplitude von $\varphi_{max}/\varphi_0 = 3 - 4$ überein, was die Vermutung, es handle sich um Solitonen/Porositätswellen, bestätigt.

¹⁷Hinweis: Die Skalierung in Schmeling (2000, Abb. 4) verwendet eine andere Normierung als die hier verwendete. Für die in dieser Arbeit verwendete Normierung muss die Phasengeschwindigkeit lediglich mit AZ multipliziert werden.

Dieser Abspaltungsprozess ist in Abbildung 6.40.d bei Position $nx = 100$, $nz = 105$ zu erkennen. Hier hat sich am Ende eines kleineren Kanals eine kugelförmige Schmelzlinse gebildet. Da die optimalen Bedingungen für Solitonen an die Porosität gebunden sind, folgen diese bei ihrem Aufstieg der Ausrichtung eines Kanals. Die Bildung eines Solitons erfolgt allerdings am Kanalende, dementsprechend stagniert dieser zunächst, bis, bedingt durch die Scherung, ein Kanal aus einer höheren Schicht den Stagnationspunkt passiert und sich beide Kanäle verbinden. Dann steigt das Soliton in dem neuen Kanal weiter bis zu dessen Ende auf und vereint sich ggf. mit dem dort schon vorhandenen Soliton. Hat eine Vereinigung stattgefunden, ist oftmals das optimale Verhältnis zwischen Schmelzverteilung und Aufstiegsgeschwindigkeit gestört. Demzufolge bilden sich neue, ein optimales Verhältnis aufweisende, Solitonen, die dann aufsteigen. Das Zerfallen einer großen Schmelzansammlung in einige kleinere Solitonen ist gut in Abbildung 6.40.f bei der Position $nx \approx 90$ zu erkennen. Dort haben sich im Laufe der Zeit aus einer großen Schmelzinklusion drei bis vier kleine Solitonen gebildet.

Dass die Kanalisierungsinstabilität unter günstigen Umständen einen Aufstieg der Schmelze in Solitonen, welche entlang des Kanalverlaufes aufsteigen, bewirkt, ist ein interessantes Ergebnis, das zu einer Renaissance der Untersuchung von Solitonen führen könnte.

6.11 Interaktion zwischen Plume, Lithosphäre und Kanalisierungsinstabilität

In dieser Studie wird versucht, die Ausrichtung der Kanäle innerhalb des oberen Mantels ($z_{max} = 200$ km) zu ermitteln. Da die Ausrichtungswinkel parallel zur maximalen Kompressionsspannung verlaufen, werden diese aus dem Spannungsfeld ermittelt (Kap. 2.4.1). Die Richtung ξ der maximalen Kompressionsspannung ist gegeben durch (Kap. 2.4.1)

$$\xi = \arctan \left(-\frac{\tau_{11} - \lambda^*}{\tau_{12}} \right), \quad (6.14)$$

wobei λ^* das Minimum der Eigenwerte des Spannungstensors ist.

Diese Eigenwerte können leicht aus dem Geschwindigkeitsfeld (Stromfunktionsfeld) und der Viskosität bestimmt werden.

Die Experimente erfolgen in einer 200 km tiefen und 400 km breiten Box. In dieser werden am linken unteren Rand die Einstromgeschwindigkeit eines Plumes sowie oben die Spreizungsgeschwindigkeit der Platte festgelegt.

In allen Experimenten ist die Einstromgeschwindigkeit des Plumes am linken Rand der Box $w_P = 6.3 \text{ cm a}^{-1} = \text{konst.}$. Diese Einstromgeschwindigkeit liegt im unteren Drittel der in der Literatur zu findenden Einstromgeschwindigkeit für den Island Plume (2.0 cm a^{-1} Ribe *et al.* (1995), 4.6 cm a^{-1} Sleep (1990), $5 - 20 \text{ cm a}^{-1}$ Kokfelt *et al.* (2003)). Die Geschwindigkeit an der Oberseite der Lithosphäre variiert zwischen $u_L = 0.78 - 7.88 \text{ cm a}^{-1}$. Die verwendete Rheologie dieser Versuche besteht aus einer Reihenschaltung zweier Potenzkriechgesetze. Die Volumenviskosität wird, da sie nur ein Skalierungsfaktor im Rahmen der Kanalisierungsinstabilität ist, vernachlässigt. Es wird mit tiefenunabhängigen Dichten gerechnet, wobei für die Schmelze eine Dichte von 3.1 kg m^{-3} , für eine verarmte Matrix eine Dichte von 3.2 kg m^{-3} und für eine unverarmte Matrix eine Dichte von 3.6 kg m^{-3} angenommen wird. Diese Versuchen werden unter thermischen Bedingungen gerechnet, hierdurch wird zusätzlich zu den Eingangs erklärten (Kap. 2.2) Erhaltungsgleichungen der Masse und des Impulses die Energieerhaltungsgleichung gelöst. Da es hier nur auf die Richtung der maximalen Kompressionsspannung ankommt und diese in dieser Arbeit unabhängig von der Temperatur ist, wird auf eine Einführung in diese Problematik (Berücksichtigung der Energieerhaltungsgleichung in den numerischen Modellierung) verzichtet. Eine ausführliche Einführung in diesen Sachverhalt speziell für FDCON ist in Schmeling (2000) zu finden. Mantelkonvektionsprobleme durch die Aufstiegszahl AZ zu

AZ^1	Rm	Rtn^2	$u_{x,L}$ [cm a ⁻¹]	$u_{z,P}$ [cm a ⁻¹]	Abb.
1	32000	$4.0 \cdot 10^5$	0.78	6.30	6.44, 1. Spalte
1	32000	$4.0 \cdot 10^5$	1.57	6.30	6.44, 2. Spalte
1	32000	$4.0 \cdot 10^5$	3.15	6.30	6.41, 6.44, 3. Spalte
1	32000	$4.0 \cdot 10^5$	4.73	6.30	6.45, 1. Spalte
1	32000	$4.0 \cdot 10^5$	6.30	6.30	6.45, 2. Spalte
1	32000	$4.0 \cdot 10^5$	7.88	6.30	6.45, 3. Spalte

Tabelle 6.4. Parameterkombinationen der Versuchsreihe:

Interaktion eines Plumes mit einem MOR

1: AZ Parameter: $\varphi = 1\%$, $\dot{\epsilon}_0 = 1.5 \cdot 10^{-15} \text{ s}^{-1}$, $\eta_f = 1 \text{ Pas}$, $h = 200 \text{ km}$; 2: Rtn Parameter: $\eta_f = 15 \cdot 10^6 \text{ Pas}$ (Aufgrund des hohen Viskositätskontrastes musste die Fluidviskosität heraufgesetzt werden um numerisch stabile Ergebnisse zu erhalten), $\eta_m = 1 \cdot 10^{21} \text{ Pas}$, $h = 200 \text{ km}$; $u_{x,L}$ Spreizungsgeschwindigkeit der Lithosphäre, $u_{z,P}$ vertikale Einstromgeschwindigkeit des Plumes in einer Tiefe von 200 km

charakterisieren ist unpassend, da keine einheitliche Dehnungsrate zu bestimmen ist. Hier bietet sich vielmehr die Schmelz-Rayleighzahl Rm an. Sie bezieht sich, im Gegensatz zur Aufstiegszahl AZ , nicht auf das Verhältnis der Darcy Geschwindigkeit zur Dehnungsrate, sondern lediglich auf das Verhältnis des Auftriebs aufgrund eines Dichtekontrastes zur thermischen Diffusion. Sie ist gegeben durch

$$Rm = \frac{\delta \rho g h^3}{\eta_0 \kappa}. \quad (6.15)$$

$\delta \rho$ [kg m⁻³] Dichtekontrast zwischen Schmelze und Matrix, $\kappa = 10^{-6}$ [m² s⁻¹] thermischer Diffusionskoeffizient

Die sich aus den oben erwähnten (Rand-)bedingungen ergebenden Parameterkombinationen sind in Tabelle 6.4 aufgelistet.

Die Abbildungen 6.41 und 6.42 zeigen von der Versuchsreihe mit einer Spreizungsgeschwindigkeit der Lithosphäre von $u_{x,L} = 3.15 \text{ cm a}^{-1}$ die dimensionslose Temperatur (Abb. 6.41.a, $T_{scal} = 1000^\circ$), die Porositätsverteilung (Abb. 6.41.b), die Aufstiegsgeschwindigkeitsverteilung der Matrix (Abb. 6.41.c) und den Auslenkwinkel (Abb. 6.42), welcher sich anhand des Spannungsfeldes für die Ausrichtung der Kanäle ergeben würde, zu einer Zeit

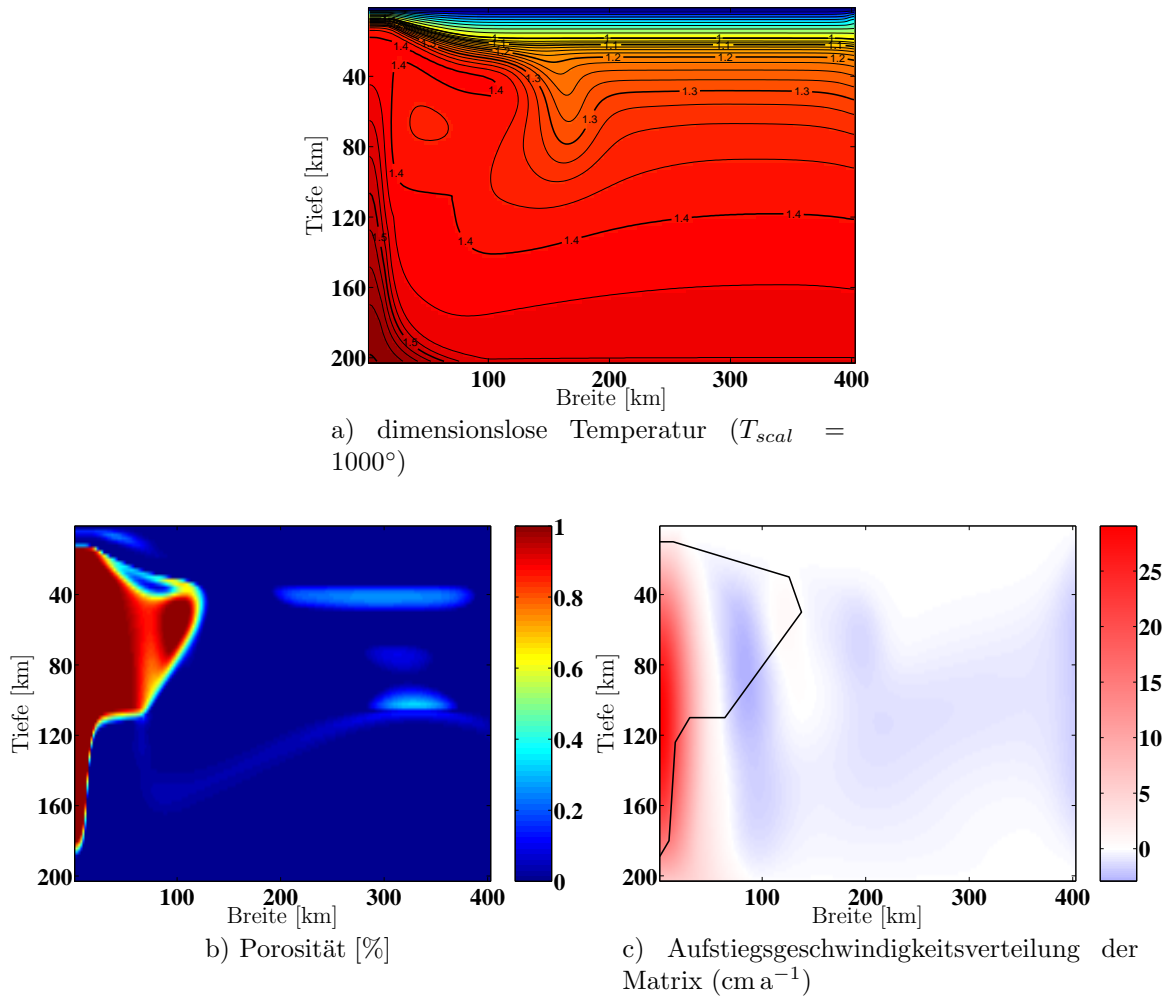


Abbildung 6.41. Temperatur-, Porositäts- und Aufstiegsgeschwindigkeitsverteilung eines Plumes, der mit einem MOR interagiert (Spreizungsgeschwindigkeit der Kruste $u_{Kruste} = 6.3 \text{ cm a}^{-1}$)

Die Spreizungsgeschwindigkeit der Kruste beträgt $u_{Kruste} = 6.3 \text{ cm a}^{-1}$, die maximale Einstromgeschwindigkeit des Plumes bei $x = 0 \text{ km}$, $z = 200 \text{ km}$ beträgt 6.30 cm a^{-1} . Der Plume führt eine maximal Porosität von 1%. Übersteigt die Porosität diesen Wert, wird dem System die Schmelze entzogen. — Plumeausdehnung

$t = 1.9 \text{ Ma}$. Die weiteren Versuche sind in den Abbildungen 6.44 und 6.45 zusammengefasst, da sie kaum eine Änderung aufweisen.

In der Temperaturverteilung ist deutlich erkennbar, wie sich der Plumekopf unter dem sich spreizenden Rücken ausbildet. Der Plumekopf liegt in der Regel in einer Tiefe von 40 km,

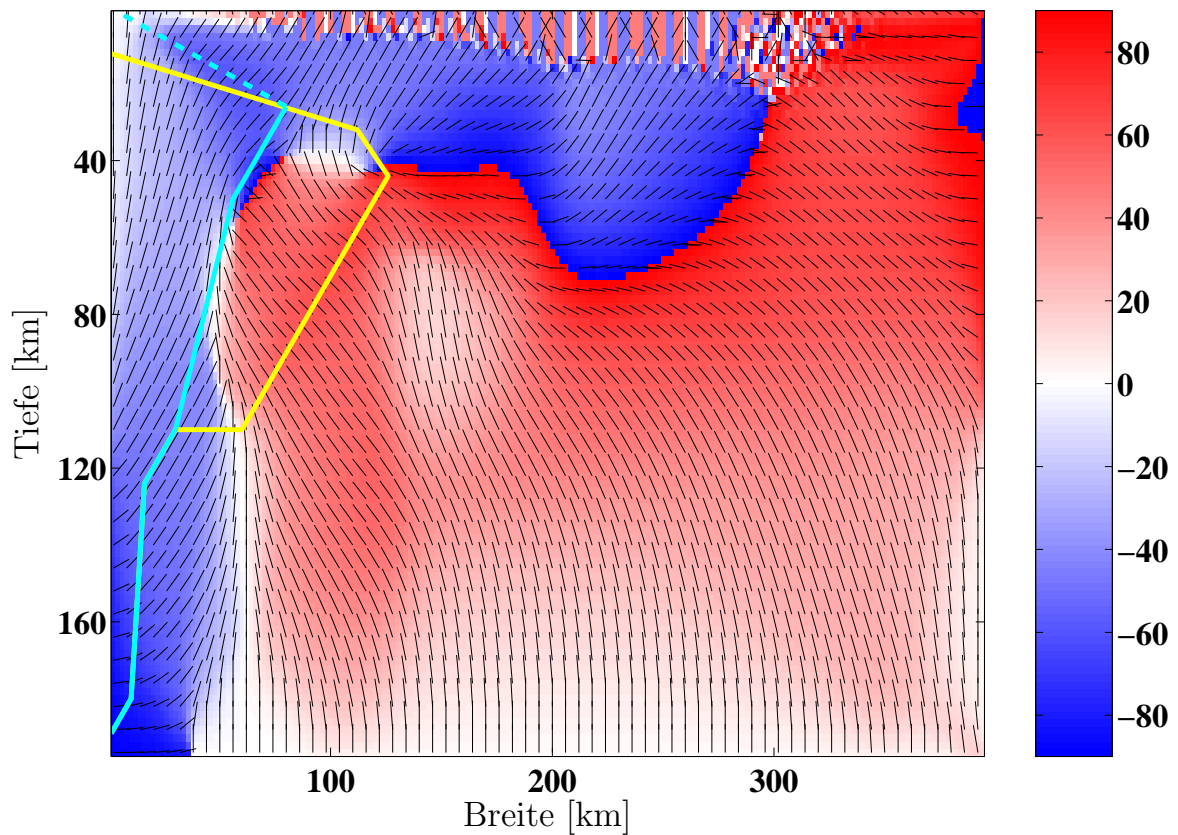


Abbildung 6.42. Auslenkwinkel eines Plumes, der mit einem MOR interagiert (Spreizungsgeschwindigkeit der Kruste $u_{Kruste} = 6.3 \text{ cm a}^{-1}$)

- Plumeausdehnung
- Schmelzaufstieg bedingt durch die Kanalisierungsinstabilität
- - Schmelzaufstieg durch den von Sparks und Parmentier (1994) bzw. Hall und Kincaid (2003) beschriebenen Mechanismus

Anmerkung: Das Streifenmuster im oberen Teil der Abbildung beruht darauf, dass in der Lithosphäre die deviatorischen Spannungen gegen Null gehen. Diese sind jedoch für die Berechnung der Richtung der maximalen Kompressionsspannung nötig. Aus diesem Grund ist die Richtung nicht eindeutig bestimmbar, was sich in diesem Muster widerspiegelt und dementsprechend keiner weiteren Beachtung bedarf.

hat eine Ausdehnung von etwa 120 km und weist eine Temperatur von 1400° bis 1500° auf. Ab einer Tiefe von 80 km ist die Verjüngung des Plumekopfes zum Plumestamm erkennbar. Der Stamm hat ab einer Tiefe von 80 km eine durchschnittliche Breite von 20 km sowie

eine Temperatur von 1450° , welche in einer Tiefe von 180 km auf 1575° ansteigt. Ferner ist sehr gut erkennbar, welchen Einfluss die kalte Lithosphäre auf den heißen Plume ausübt. Der heiße Plumekopf passt sich der Form der Unterseite der Lithosphäre (\sqrt{t} -Verlauf) an.

Die Porositätsverteilungen zeigen, dass nur der Plume selbst Schmelze führt. Weiterhin ist aus Abbildung 6.41.c ersichtlich, dass die Abspaltung des Porositätsablegers bei 100 km von einem leichten Abstrom bei ≈ 90 km herrührt; die Porositätsanomalie am rechten Rand beruht auf der Anfangsverteilung und bedarf somit keiner weiteren Beachtung.

Die maximale Porosität liegt bei 1%, da dem System die überschüssige Schmelze bei Übersteigen dieses Wertes entzogen wird. Hieraus ergibt sich jedoch, dass eine Erweichung der Matrix im Plume aufgrund von weiterer Porositätszunahme unterbunden wird.

Die Auslenkwinkel im Plumestamm liegen bei ungefähr -45° , demzufolge wird die Schmelze prinzipiell aus diesem heraus transportiert. Der Plumestamm wird quasi durch eine Zone erhöhter Porosität ummantelt. Der Plumekopf weist hingegen eine Zweiteilung auf:

So herrschen an der Plumeachse vorwiegend Auslenkwinkel kleiner als -45° (bis ≈ 50 km), während weiter rechts davon eine ebenso breite Zone mit einem Auslenkwinkel von 45° (bis ≈ 100 km) auftritt. Hieraus ergibt sich, dass Schmelze zur Mitte der gezeigten Plumekopfhälfte hin fokussiert wird. Aufgrund dieser Kanalverteilung wird Schmelze prinzipiell vom MOR defokussiert, könnte aber, wie in Abbildung 6.42 dargestellt (türkise durchgezogene Linie), 70 – 80 km von diesem entfernt bis zur Unterseite der Lithosphäre aufsteigen. Nun zeigt sich aber in der Temperaturverteilung, dass die Lithosphärenunterseite bei den MORs ab einer Spreizungsgeschwindigkeit von mehr als 3.15 cm a^{-1} eine zu dem MOR hin geneigte Struktur aufweist (\sqrt{t} -Gesetz). Auf Grund dessen könnte Schmelze an der schrägen Unterseite der Lithosphäre zum MOR hin gleiten (türkise gestrichelte Linie) und so dennoch am MOR austreten (Sparks und Parmentier, 1994; Hall und Kincaid, 2003)

Dieser Prozess funktioniert um so besser, je höher die Spreizungsgeschwindigkeit ist, da die generelle Winkelverteilung vergleichbar bleibt, jedoch die „Schmelzrutsche“ um so breiter ausgebildet ist, je schneller der Rücken spreizt.

Weiterhin könnte Schmelze, die diesem Aufstieg nicht folgt, sondern vom MOR wegtransportiert wird, durch den Abstrom, der sich im und rechts vom Plumekopf ausbildet (Abb. 6.41.c, horizontale Position 100 km), wieder in Gebiete befördert werden, die eine Fokussierung fördern, und erneut der Ummantelungszone bzw. den Bereichen, in denen ein Entlanggleiten an der Unterseite der Lithosphäre möglich ist, zugeführt werden.

Allerdings setzt das voraus, dass die Schmelze wieder in tiefere Regionen transportiert werden kann. Hier wirkt vor allem der Auftrieb der Schmelze entgegen. Eine Abschätzung der Aufstiegsgeschwindigkeit der Schmelze $u_{z,DarcySchmelze}$ nach dem Darcy Gesetz¹⁸ (Glg. 2.4) ergibt $u_{z,DarcySchmelze} \approx 15 \text{ cm a}^{-1}$. Wird die Aufstiegs- mit der Abstromgeschwindigkeit aus Abbildung 6.41.c verglichen, so ist ersichtlich, dass die Aufstiegsgeschwindigkeit etwas größer ist als die Abstromgeschwindigkeit, folglich die Schmelze trotz der Gegenwirkung des Abstroms aufsteigt, wenn auch nur sehr langsam. Zu beachten ist jedoch, dass in dieser Abschätzung die Fluidviskosität von $\eta_f = 1 \text{ Pa s}$ einen sehr kritischen Parameter darstellt, da ihre Erhöhung um ein bis zwei Größenordnungen (Kushiro, 1986), dazu führt, dass die Aufstiegsgeschwindigkeit der Schmelze geringer ausfällt als die Abstromgeschwindigkeit, und die Schmelze dementsprechend entweder stagniert oder wieder zurück in tiefere Regionen transportiert werden könnte. Jedoch kann diese Erhöhung mit zunehmender Tiefe wieder aufgehoben werden, da die Dichte der Schmelze mit der Tiefe ansteigt, so dass sich der Auftrieb der Schmelze verringert (Kushiro). Welcher dieser Effekte überwiegt, ist bis jetzt unklar, eine genauere Untersuchung dieses Recycling-Prozesses unter Berücksichtigung eines genauen Viskositätstiefenprofils und des Einflusses der Dichtezunahme mit der Tiefe könnte eine weiterführende Untersuchung dieser Arbeit darstellen.

Dass Schmelze an der Unterseite der Lithosphäre entlang gleiten kann, ist bereits von Sparks und Parmentier (1994) und Hall und Kincaid (2003) gezeigt worden. Neu hingegen wäre der Recycling Prozess der Schmelze aufgrund der Ausrichtung des Kanalnetzwerkes.

Das Zusammenspiel zwischen der Kanalisierungsinstabilität, dem Entlanggleiten der Schmelze an der Lithosphärenunterseite und dem neu hinzukommenden Recycling Prozess der

¹⁸mit $a = 0.001 \text{ m}$, $b = 648$, $\eta_f = 1 \text{ Pa s}$, $\rho_f = 3100 \text{ kg m}^{-3}$

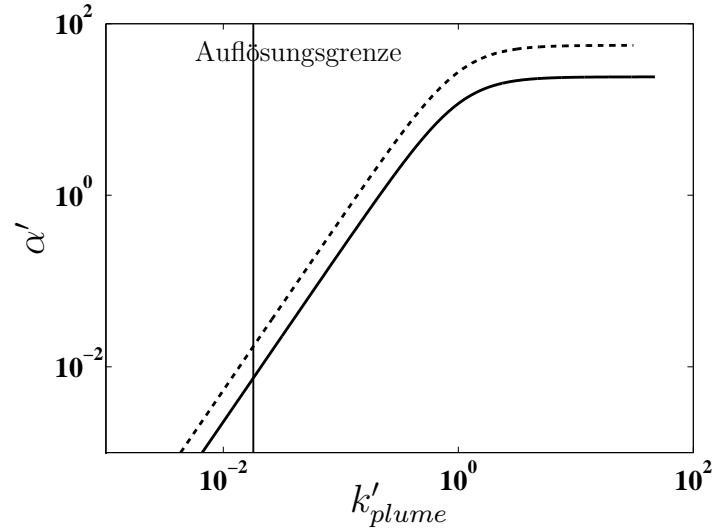


Abbildung 6.43. Auflösungsgrenze der Versuchsreihe Interaktion eines Plumes mit einem MOR

Schmelze, stellen das Erklärungsmodell dieser Arbeit dar, wie eine Fokussierung von Schmelze zum MOR bei einer Interaktion mit einem Plume aussehen könnte.

Dieses Erklärungsmodell ist jedoch ein rein hypothetisches, da aufgrund mangelnder Auflösung¹⁹ von FDCON solch ein Zusammenspiel nicht modelliert werden kann. (Abb. 6.43). Aus Abbildung 6.43 ist ersichtlich, dass die Wachstumsrate der maximal aufzulösenden Wellenzahl bei diesen Versuchen $\alpha' (k'_{plume} = 0.018) < 10^{-2}$ ist. Hierdurch findet ein zu langsames Wachstum von Kanälen statt, als dass sie bei diesen Versuchen hätten beobachtet werden können. Versuche, die Parameter so einzustellen, dass eine Kanalbildung selbst bei dieser Gitterauflösung stattfindet, würde eine Kompaktionslänge von $\approx 10^3$ m erfordern, was wiederum bei den hier verwendeten Parametern (Tab. A.2) einer Hintergrundviskosität von $\eta_0 \approx 10^{27}$ Pa s oder einer Fluidviskosität von $\eta_f \approx 10^{-6}$ Pa s entspräche. Bei Versuchen mit solchen Parametern zeigte sich, wie vermutet, dass FDCON instabil wird. Aus diesem Grund und da diese Parameter derart von der realen Erde abweichen, wurde auf eine Realisierung solcher Versuchsbedingungen verzichtet.

¹⁹Es können bei diesen Boxdimensionen nur Strukturen gut aufgelöst werden, welche $\approx 10^3$ m groß sind.

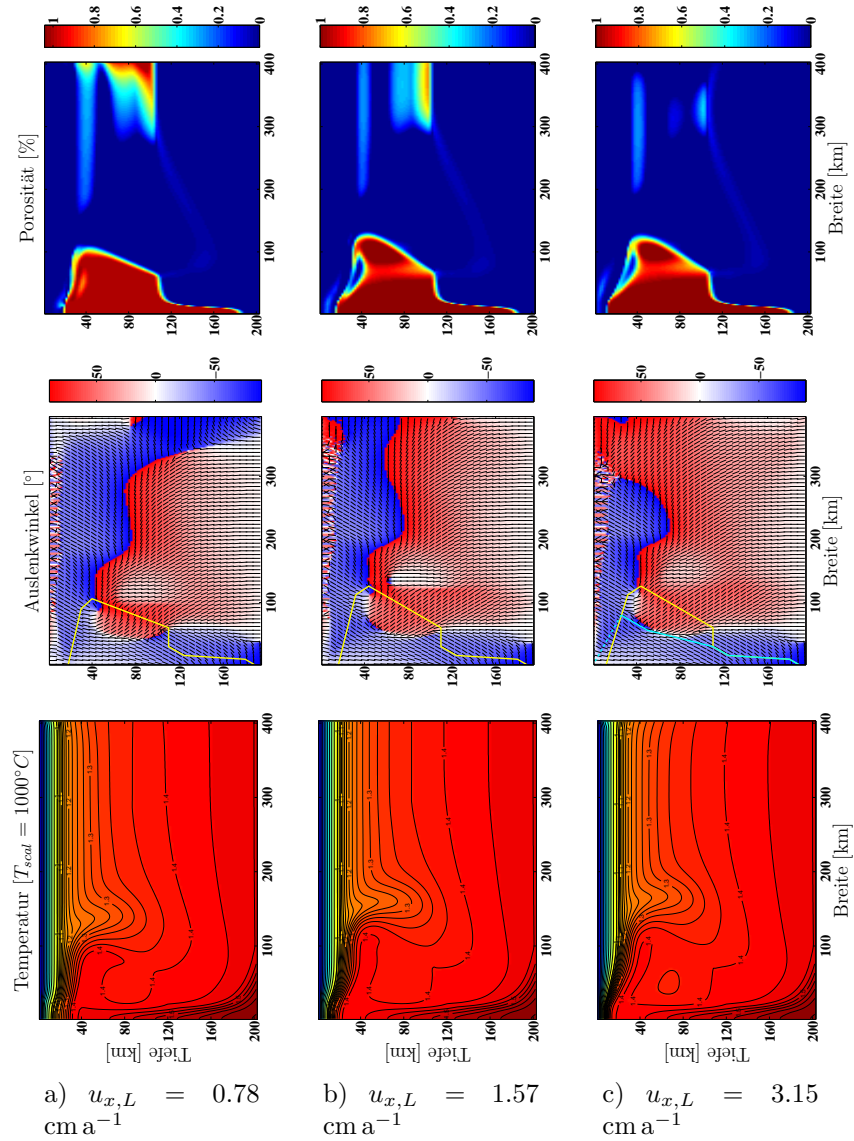


Abbildung 6.44. Temperatur, Auslenkwinkel und Porositätsverteilung der Versuchsreihe Interaktion zwischen Plume, Lithosphäre und der Kanalisierungsinstabilität (Teil I)

— Plume

Anmerkung: Das Streifenmuster im oberen Teil der Abbildung beruht darauf, dass in der Lithosphäre die deviatorischen Spannungen gegen Null gehen. Diese sind jedoch für die Berechnung der Richtung der maximalen Kompressionsspannung nötig. Ausdiesem Grund ist die Richtung nicht eindeutig bestimmbar, was sich in diesem Muster widerspiegelt und dementsprechend keiner weiteren Beachtung bedarf.

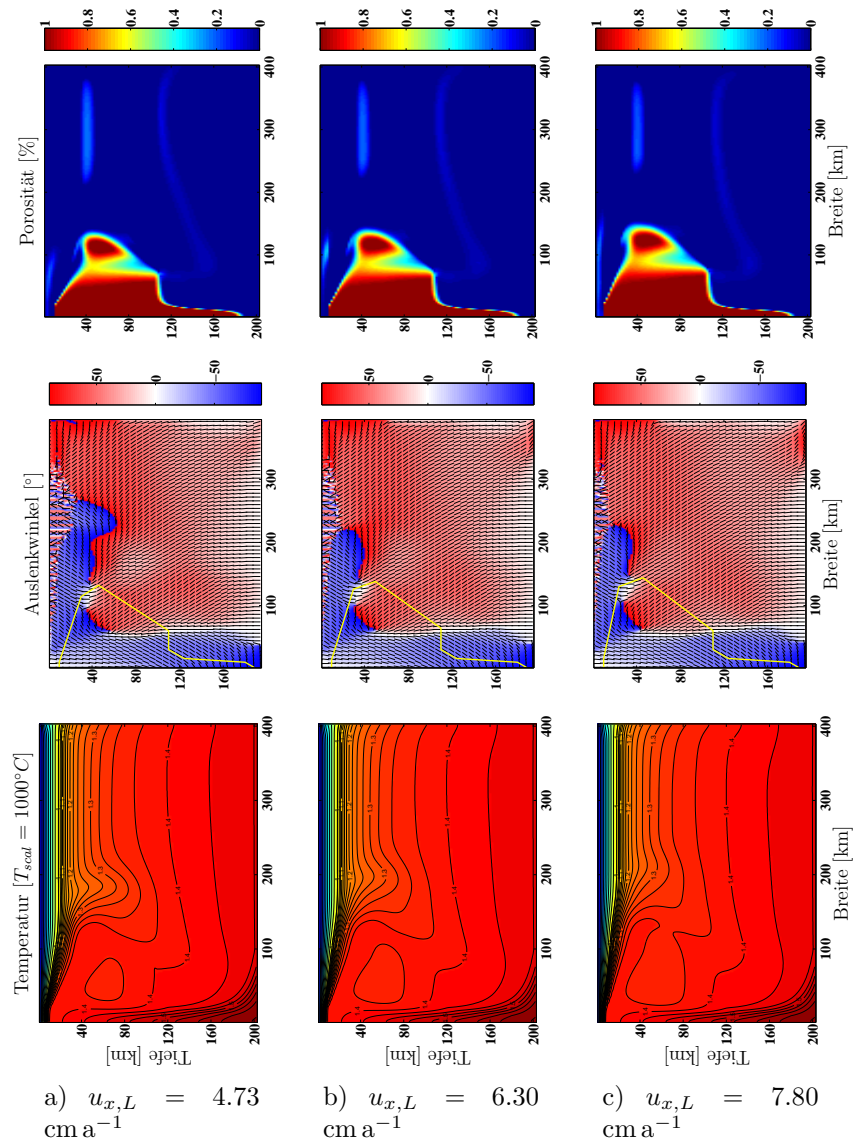


Abbildung 6.45. Temperatur, Auslenkwinkel und Porositätsverteilung der Versuchsreihe Interaktion zwischen Plume, Lithosphäre und der Kanalisierungsinstabilität (Teil II)

— Plume

Anmerkung: Das Streifenmuster im oberen Teil der Abbildung beruht darauf, dass in der Lithosphäre die deviatorischen Spannungen gegen Null gehen. Diese sind jedoch für die Berechnung der Richtung der maximalen Kompressionsspannung nötig. Aus diesem Grund ist die Richtung nicht eindeutig bestimmbar, was sich in diesem Muster widerspiegelt und dementsprechend keiner weiteren Beachtung bedarf.

In dieser Arbeit wurde durch numerische Modellierung das Verhalten der spannungsangetriebenen Schmelzsegregation, der Kanalisierungsinstabilität, unter diversen initialen Porositätsverteilungen und Spannungszuständen untersucht. Es konnte erfolgreich gezeigt werden, dass sich Schmelze in Richtung der maximalen Hauptspannung anreichert und Kanäle mit einer inhomogenen Schmelzverteilung bildet. Hierdurch werden die von Stevenson (1989) und Richardson *et al.* (1996) durchgeführten numerischen Experimente bestätigt. Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Erforschung der Kanalisierungsinstabilität erweitert um den Aspekt ihres Verhaltens bezüglich eines äußeren Spannungsfeldes bei verschiedenen initialen Porositätsverteilungen, der Untersuchung der Kanalisierungsinstabilität bei großen Dehnungen und der damit verbundenen Analyse der entstehenden Strukturen, des Einflusses des Auftriebs auf die Ausbildung von Kanalnetzwerken und um die abschließende Prüfung, ob durch ein durch die Kanalisierungsinstabilität ausgebildetes Kanalnetzwerk die Möglichkeit besteht, Schmelze zu einem MOR zu fokussieren.

Viskositätsunterschiede in einer schmelzgefüllten porösen Matrix verursachen bei deren Deformation einen Druckgradienten, welcher die Schmelze in Richtung der maximalen Hauptspannung anreichert und der zur Ausbildung von Kanälen, welche eine inhomogene Schmelzverteilung aufweisen, führt. Die Kanäle wachsen mit einer Wachstumsrate von

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\dot{\epsilon}} = \frac{2a_1 (1 - \varphi_0) \frac{k_\varphi}{\eta_f} \eta_{s0} k^2}{1 + \left(\eta_{b0} + \frac{4}{3} \eta_{s0} \right) \frac{k_\varphi}{\eta_f} k^2} \quad (7.1)$$

an (Stevenson, 1989).

Die Wachstumsrate α dieser Kanäle weist zur Wellenzahl k eine Proportionalität von $\alpha \sim ak^2/(1 + bk^2)$ auf. Dieser Zusammenhang hat zur Folge, dass sich ab einer bestimmten Wellenzahl alle Schmelzverteilungen mit einer größeren Wellenzahl gleich stark verstärken. Bisher konnte in die Theorie für trockene Medien kein Abfall der Wachstumsrate bei großen Wellenzahlen implementiert werden. Rabinowicz und Vigneresse (2004) verwarfen ihren

dahingehenden Ansatz, welcher die Minimierung der Oberflächenenergie (feinstrukturiertes Kanalnetzwerk = große Oberflächenenergie) berücksichtigt, aufgrund zu vereinfachender Annahmen.

Lediglich unter der Bedingung, dass Wasser aus der Schmelze zurück in die Matrix diffundiert und diese dadurch erweicht, was zu einem Druckabbau führt, der wiederum die Effektivität der Kanalisierungsinstabilität reduziert¹, konnte einer spezifischen Wellenzahl eine maximale Wachstumsrate bezüglich der Kanalisierungsinstabilität zugeordnet werden (Hall und Parmentier, 2000). Diese ausgezeichnete Wellenzahl liegt nach ihnen bei $k_{hall} \approx (\varphi \kappa_{H_2O} \delta_c^2 / \Upsilon)^{-1/4}$ (Glg. 3.13 in Hall und Parmentier). Eine Grundvoraussetzung der Analyse ihrer Gleichungen 7 und 8 ist das Aufschmelzen des Gesamtsystems und die Fraktionierung von Wasser in die Schmelze, da aufgrund ihrer Analyse nur hierdurch die Erhaltung der Wasser- und Schmelzperturbation gewährleistet ist. Diese beiden Gleichungen sind gegeben als²

$$\alpha_{Hall} = -2 \frac{\dot{\epsilon}_{xz}}{(\eta_b + \frac{4}{3}\eta_s)} \frac{\partial \eta_s}{\partial c_s} \frac{k^2 \delta_c^2}{1 + k^2 \delta_c^2} C \quad (7.2)$$

$$\frac{dC}{dt} = -\frac{\varphi \kappa_{H_2O} k^2 + \Upsilon}{\varphi + D} C + \frac{\Upsilon c_s}{(\varphi + D)^2} \delta \varphi \quad (7.3)$$

Um diesen Sachverhalt zu prüfen, wurde die Erhaltungsgleichung für Wasser in FDCON implementiert und erfolgreich ausgetestet. Der Aufschmelzprozess sowie die Diffusion von Wasser wurden in dieser Arbeit jedoch aufgrund der in Kapitel 2.1 erstellten Abschätzung der jeweiligen Diffusionszeiten vernachlässigt. Hierdurch ergibt sich, dass Wasser lediglich einen erweichenden Einfluss auf die Viskositäten nimmt, dieser jedoch zur Folge hat, dass die Kanalisierungsinstabilität für kleine Wellenzahlen abgeschwächt wird. Bedingt durch die Vernachlässigungen, konnte die Ausbildung einer spezifischen Wellenzahl, bei der eine maximale Wachstumsrate herrscht, nicht untersucht werden. Wendet man jedoch diese Vernachlässigung auf Gleichung 7.3 an, so wird diese Null, was gleichbedeutend damit ist,

¹Da diese beiden Prozesse, die Diffusion von Wasser und die Kanalisierungsinstabilität auf zwei unterschiedlichen Wellenzahlbereichen wirken

²Die Notation ist an diese Arbeit angepasst worden.

dass sich die Wasserkonzentration zeitlich nicht ändert. Dies würde allerdings bedeuten, dass eine lineare Stabilitätsanalyse der Gleichung 7.2 von Hall und Parmentier ebenfalls, lediglich mit anderen Vorfaktoren, die hier bekannte Proportionalität $\alpha \sim \tilde{a}k^2/(1 + \tilde{b}k^2)$ ergeben würde. Allerdings fällt so ebenfalls der von Hall und Parmentier vorgeschlagene Prozess der Ausbildung einer spezifischen Wellenzahl heraus. Da dies bislang der vielversprechendste Versuch einer Absenkung der Wachstumsrate bei großen Wellenzahlen zu sein scheint, sollte mit FDCON die Kanalisierungsinstabilität weiter untersucht werden und eine vollständige Implementierung der Wassererhaltungsgleichung erfolgen. Weiterhin sollte versucht werden, FDCON dahingehend zu verfeinern, dass die Modellierungen einen größeren Wellenzahlenbereich abdecken als bisher. Während ersteres lediglich eine einfache Erweiterung von FDCON darstellt und einfach zu realisieren wäre, so ist letzteres wohl nur durch eine vollständige Reprogrammierung von FDCON unter Ausnutzung heutiger Programmiermöglichkeiten wie auch technischer Möglichkeiten (Parallelisierung, Cluster, etc.) zu verwirklichen.

Wie erwähnt, weisen die Kanäle eine inhomogene Schmelzverteilung auf, die dafür verantwortlich ist, dass sich die Schmelze in diesen Kanälen an diesen Maximalstellen weiter anreichert und der Kanal, bedingt durch den aufgeprägten Spannungszustand, schließlich an den verarmten Kanalstellen auseinander gerissen wird.

Aus Stabilitätsgründen können keine größeren Porositäten als 15% zugelassen werden. Eine Abschätzung zeigt jedoch, dass die Kanäle bei den hier üblichen Parametern (Tab. A.2) nach einer Scherdehnung von $\varepsilon_{xy} \approx 0.85$ voll aufgeschmolzen sind (100% Porosität).

Nachfolgend verbinden sich die hierdurch entstandenen Schmelzlinsen unter der Bildung von „en-échelon arrays“ wieder, wodurch sich wiederum ein langer, in etwa um 45° ausgelegter Kanal bildet. Dieser Heilungsprozess induziert in den hier vorgestellten Experimenten lokale Reine Scherungszustände, die sich mit der ursprünglich vorgegebenen Einfachen Scherung so stark überlagern, dass erstere in einigen Gebieten vorherrschen. Diese Beobachtungen fanden alle unter der Bedingung, dass kein Auftrieb zwischen Schmelze und Matrix existiert, statt. Wird dieser Auftrieb hinzugefügt, so ist erkennbar, dass eine Kombination

zwischen den die Kanalisierungsinstabilität und dem Auftrieb bestimmenden Parametern existiert, bei der sich Solitonen ausbilden. Diese Solitonen folgen bei ihrem schnelleren Aufstieg dem Verlauf der schmelzgefüllten Kanäle und passieren dabei, ohne ihre Form zu verändern, andere kleine Solitonen, die ihren Weg kreuzen. Die durchschnittliche Aufstiegs- geschwindigkeit der Solitonen entspricht einem Vielfachen der Aufstiegs- geschwindigkeit der Schmelze aufgrund von Segregation. Weiterhin deckt sich die Solitonaufstiegs- geschwindigkeit mit der von Schmeling (2000, Abb. 4) angegebenen.

Die von Holtzman *et al.* (2003) gefundenen Auslenkwinkel der Kanäle von 60° konnten in dieser Arbeit nur in der initialen Bildungsphase der Kanäle beobachtet werden. Sie erklären ihre gefundenen Auslenkwinkel durch eine Superpositionierung zwischen dem bevorzugten Kanalisierungsinstabilitätswinkel von 45° und einem horizontal verlaufenden „shear partitioning“, wobei dieses Partitionieren aber in der Theorie Stevensons (1989) nicht berücksichtigt wird. Weiterhin liefen meiner Meinung nach die Experimente von Holtzman *et al.* wesentlich langsamer ab, als die dieser Arbeit, wodurch Holtzman *et al.* nicht den Bedingungen genügten, um die Effekte dieser Arbeit (Zerreißen einzelner Kanäle und der damit verknüpften Ausbildung von 45° Schmelzlinen) zu beobachten. Diese Vermutung stützt sich auf die Tatsache, dass der von Holtzman *et al.* eingeführte Quotient $\zeta = \delta_c/h$, dessen Reziprokwert ein Maß für die Stärke der Kanalisierungsinstabilität ist, bei seinen Experimenten bei $0.05 - 10.5$ lag, während er in dieser Untersuchung unter 0.01 liegt (Kap. 6.8.1). Ein weiterer Punkt, der einen Vergleich der Holtzman *et al.* Experimente mit denen dieser Arbeit erschwert bzw. nicht erlaubt, ist ihr Hinweis, dass ihre Experimente evtl. auf einem „damage mechanism“ (Bercovici *et al.*, 2001) beruhen und damit anderen physikalischen Gesetzmäßigkeiten folgen, als die hier vorgestellte Kanalisierungsinstabilität.

Die von Spiegelman (2003) erneut durchgeführte lineare Stabilitätsanalyse zeigt, dass nur die Kanäle, welche eine initiale Ausrichtung um 60° aufweisen, eine große Scherung überstehen. So werden z.B. Kanäle, die einen Auslenkwinkel von 45° aufweisen (maximale Verstärkung im Falle von Einfacher Scherung), zwar anfänglich maximal verstärkt, aber, bedingt durch die Scherung, sofort aus dieser optimalen Position herausgedreht, während

die, die bei 60° starten, immer mehr zur maximalen Verstärkung gedreht werden, was in der Betrachtung des Gesamtprozesses dazu führt, dass die 60° Kanäle am besten anwachsen können.

Der Prozess der Verstärkung der Porosität konnte ebenfalls beobachtet werden (Abb. 6.14). Wie vorhergesagt, werden die Kanäle mit zunehmender Scherdehnung wieder aus der Wachstumsphase herausgedreht und beginnen mit einem Abbau der Porosität. Jedoch zeigt sich, anders als bei Spiegelman (2003), dass diese Kanäle zwar abgebaut werden, das System jedoch neue kleine ellipsenförmige Schmelzlinsen ausbildet, welche eine $\approx 45^\circ$ Ausrichtung aufweisen (lange Halbachse ist parallel zu 45°). Diese Strukturen verbleiben bei anhaltender Scherdehnung als in $\approx 45^\circ$ geneigte 2D Ellipsen in der Matrix zurück, um so die effektive Viskosität des Gesamtsystems und damit zugleich die Dissipationsrate zu minimieren. Die 2D Ellipsen vereinen sich jedoch wieder mit an ihnen vorbeiziehenden, anderen Strukturen, um so lange, zusammenhängende Kanäle auszubilden, welche eine inhomogene Porosität aufweisen, durch die dann eine effektive Schmelzextraktion erfolgen kann.

Die von Walte (2004, Kap. 6) beschriebene Dilatanz des von Schmelze ausgefüllten Porenraums, bedingt durch das Aneinandervorbeischieben von Körnern und der damit beobachteten Schmelzakkumulation, konnte in diesen Versuchen nicht beobachtet werden. Zum einen liegt dies an der hier verwendeten, mesoskaligen Dimension, die eine Beobachtung auf Korngröße nicht zulässt, und zum anderen daran, dass, wenn eine Umskalierung der hier gewonnenen Ergebnisse auf Korngröße vorgenommen werden würde und die Ergebnisse dann immer noch gültig sind, die 2D Schmelzlinsen, die dann die Kornzwischenräume repräsentieren, bevorzugt auf ein und der selben „Höhe“ liegen, so dass der Prozess des Aneinandervorbeigleitens ohne zusätzliche vertikale Bewegung erfolgt und dementsprechend keine Dilatanz beobachtet werden würde.

Unter den hier verwendeten konservativen Parametern eines aufsteigenden Plumes (Einflussgeschwindigkeit des Plumes in 200 km Tiefe: 6.30 cm a^{-1} , $Rtn = 4.0 \cdot 10^5$, $Rm = 32000$, $AZ = 2.0 \cdot 10^{-12}$) und realistischen Spreizungsgeschwindigkeiten von $0.78 - 7.88 \text{ cm a}^{-1}$

konnte bei den Versuchen zur Interaktion eines Plumes mit einem MOR nur bedingt eine Fokussierung der Schmelze modelliert werden. Die Auslenkwinkelverteilung zeigt (Abb. 6.42, 6.44 und 6.45), dass sich die Schmelze während ihres Aufstiegs zusehends vom MOR entfernt und die Lithosphärenunterseite letztendlich in einer Distanz von 80 – 100 km zum MOR erreicht. Hier angekommen, könnte sie an der schrägen Unterseite der Lithosphäre zum MOR hingleiten (türkise gestrichelte Linie) und so dennoch am MOR austreten (Sparks und Parmentier, 1994; Hall und Kincaid, 2003). Schmelze, die zu weit vom MOR weg transportiert wurde, könnte unter günstigen Umständen durch einen Abstrom, der sich in ≈ 100 km ausbildet, zurück in den Plumekopf transportiert werden, um dort erneut aufzusteigen und dann ggf. durch den zuvor beschriebenen Prozess zum MOR transportiert zu werden (Recyclingprozess der Schmelze).

Das Zusammenspiel zwischen der Kanalisierungsinstabilität, dem Entlanggleiten der Schmelze an der Lithosphärenunterseite sowie dem Recyclingprozess der Schmelze stellt das Erklärungsmodell dieser Arbeit dar, wie eine Fokussierung von Schmelze zum MOR bei einer Interaktion desselben mit einem Plume aussehen könnte. Dieses Erklärungsmodell konnte jedoch, wie in Kapitel 6.11 gezeigt, aufgrund mangelnder Gitterauflösung mit FDCON nicht modelliert werden.

Weiterführende Versuche, die die genaue Struktur der „en-échelon arrays“ untersuchen, sowie die Weiterentwicklung des verwendeten 2D Finite-Elemente-Codes FDCON dahingehend, dass doch eine Simulation der Kanalisierungsinstabilität bei Interaktion zwischen Plume und Kruste möglich ist, stellen meiner Meinung die Grundlage für zukünftige Untersuchungen dar.

Überdies wären Versuche mit einer „power-law“-Rheologie sinnvoll, da sich an Abbildung 6.27.d zeigt, dass die Zwischenräume der 2D Ellipsen, Zonen erhöhter Spannung repräsentieren, so dass bei der hier verwendeten Rheologie dort eine hohe Viskosität vorherrscht, die eine sich ausbildende Verbindung zwischen zwei Ellipsen (be-/)verhindert. Mit einer „power-law“-Rheologie würde die Viskosität dort jedoch erniedrigt werden und somit könnte ein einfacherer Verbindungsprozess zwischen zwei 2D Ellipsen ermöglicht werden.

Ferner könnte die Einwirkung eines vertikalen Temperaturgradienten, der eine sich vertikal verändernde Hintergrundporosität erzeugt, auf die Kanalisierungsinstabilität untersucht werden. Aufgrund des Gradienten werden Bereiche, in denen eine höhere Hintergrundporosität vorherrscht, schneller anwachsen. Einen vergleichbaren Effekt liefert die unterschiedlich starke numerische Diffusion:

Dort, wo sie klein ist, weisen die Kanäle eine erhöhte Wachstumsrate gegenüber den Bereichen auf, in denen die numerische Diffusion groß ist, wodurch die ersteren schneller anwachsen und sich dementsprechend im unteren Teil der Messbox zuerst klar ausgeprägte Kanäle ausbilden (Abb. 6.26.b).

Danksagung

Hiermit möchte ich allen Beteiligten, die mich während meiner Promotion begleitet und mir während dieser geholfen haben, danken.

Besonderen Dank gilt

Prof. Dr. H. Schmeling, Prof. Dr. K. Regenauer-Lieb, Prof. Dr. W. Friederich und Dr. N. Bagdassarov für die gute und effiziente Betreuung während der Promotion,

Karen Niehuus und Thomas Ruedas für die interessanten, ausführlichen und hilfreichen Diskussionen, sowie die lektorische Unterstützung,

D. Weiß und R. Strobl für die hilfreichen Tipps im Umgang mit der verwendeten Software.

Abschließend noch ein großes Dankeschön an meine Eltern und Großmutter für die moralische, finanzielle und lektorische Unterstützung.

A.1 Verwendete Symbole

Index	Bezeichnung
'	Normierte Größe
0	Hintergrundgröße
f, s	Abkürzung für Schmelze (fluid) und Matrix (solid)
i, j	$i, j = 1$ x -Richtung, $i, j = 2$ z -Richtung
nx, nz	Maximale Gitteranzahl in x - bzw. z -Richtung
RS, ES	Abkürzung für Reine Scherung bzw. Einfache Scherung
x, z	x -Richtung, z -Richtung

Symbol	Bezeichnung
$+, -, \oplus, \ominus$	Gitterpunkt bei $(i + 1, j)$, $(i - 1, j)$, $(i, j + 1)$, $(i, j - 1)$
a_1	Kohlstedt-Faktor
a_r	Querschnittsverhältnis der Schmelzeinschlüsse
a, b, n	Geometriefaktoren der Permeabilitäts-Porositätsbeziehung [m]
AZ	Aufstiegszahl
$c_{1,2}$	geometrische Faktoren für die Volumenviskosität
$c_{s,f,0}$	Wassergehalt [ppm H/Si]
D	Partitionskoeffizient
DM/Dt	Schmelzproduktionsrate pro Massenelement [s^{-1}]
f	Funktion
g	Gravitationsbeschleunigung [$m\ s^{-2}$]
h	Längeneinheit [m]
k	Wellenzahl [m^{-1}]
k_φ	Permeabilität, abhängig von der Porosität [m^2]

Symbol	Bezeichnung
m	Steigung
P	Druck [Pa]
R	Randpunkte
Rtn	Schmelz-Retentionzahl
Rm	Schmelz-Rayleighzahl
t	Zeit [s]
\vec{u}	Geschwindigkeit [m s^{-1}]
$\delta x, \delta z, \delta t$	Längen-, Zeitinkrement [m,s]
\vec{e}_3	Einheitsvektor in y -Richtung [m]
α	Wachstumsrate [s^{-1}]
β	porositätsabhängige Oberfläche pro Volumen
Γ	Wirbelstärke
γ	Auslenkwinkel [$^\circ$]
δ_{ij}	Kronecker Delta
δ_c	Kompaktionslänge [m]
$\dot{\varepsilon}$	Deviatorische Dehnungsrate [s^{-1}]
ε	Dehnung
ζ	Holtzman Koeffizient
$\eta_{b,s}$	Effektive Volumen- und Scherviskosität [Pa s]
η_m	Intrinsische Matrixviskosität [Pa s]
η_w	wasserabhängige intr. Matrixviskosität [Pa s]
κ	therm. Diffusionskoeffizient [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
κ_{H_2O}	Diffusionskoeffizient von Wasser [$\text{m}^2 \text{s}^{-1}$]
λ	Wellenlänge [m]
$\lambda_{1,2}, \lambda^*$	Eigenwerte, minimaler Eigenwert
ς	Kompaktionszahl [m^{-1}]
ξ	Richtung der maximalen Kompressionsspannung [$^\circ$]
ρ	Dichte [kg m^{-3}]
$\bar{\rho}$	gemittelte Dichte der Schmelze und Matrix [kg m^{-3}]
$\delta\rho$	Dichteunterschied [kg m^{-3}]
σ	Spannung [Pa]
τ	dev. Spannung [Pa]
φ	Porosität [%]
$\dot{\chi}$	Dissipationsrate [Pa s^{-1}]
ψ	Stromfunktion
ω	Oberflächenenergiepartitionierungsfunktion

Tabelle A.1. Verwendete Symbole

A.2 Wertebereich ausgewählter Symbole

Symbol	Wertebereich	aus
a_r	0.1	Schmeling (2000)
a, b, n	0.001 m, 648, 3	Schmeling (2000)
a_1	1 – (28) – 60	Kohlstedt <i>et al.</i> (2000)
c_0	10 ppm H/Si	Hall und Parmentier (2000)
c_1	1.16	Schmeling (2000)
D	0.01	Hall und Parmentier (2000)
η_m	10^{15} Pa s	McKenzie (1984)
κ	10^{-6} m ² s ⁻¹	Schmeling (2000)
φ_0	1% – (3%)	Seyler <i>et al.</i> (2001)
ρ	2900 kg m ⁻³	Turcotte and Schubert (2002), Anhang E
κ_{H_2O}	10^{-10} m s ⁻¹	Hall und Parmentier (2000)
$\delta\rho$	0 – (0.2) – 2100 kg m ⁻³	
u'	0.78 – (200) – 1800	
g	10 m s ⁻²	
$\dot{\epsilon}$	$6.0 \cdot 10^{-12}$ – (10^{-10}) s ⁻¹	
k'_{schmcb}	0.26 – (0.91) – 14.56	
Rtn	$1.9 \cdot 10^{-3}$ – (0.5) – 4.5	
h	62 – (1000) – $2.0 \cdot 10^5$ m	
k_φ	$4.0 \cdot 10^{-15}$ m ²	a, b, n, φ_0
η_f	0.77 Pa s	Rtn

Tabelle A.2. Wertebereich einzelner Größen

Eingeklammerte Werte einen Wertebereichs legen die Parameter des Referenzmodells fest.

Folgende Versuche für die drei Geometrien 1D Sinus, 1D Ellipse und Ellipse wurden unter der Deformationsbedingung Einfacher bzw. Reiner Scherung mit einer Dehnungsrate von $\dot{\epsilon}_{xz,xx} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, dem Viskositätsgesetz von Schmeling, mit einem Rtn von 0.5 und einem $\delta\varphi$ von $\pm 0.1\%$ bzw. $\pm 1\%$ unter trockenen Bedingungen durchgeführt:

Winkel/Achsenverhältnis	02	05	10	15
90	x	x	x	x
70	x	x	x	x
45	x	x	x	x
20	x	x	x	x
0	x	x	x	x
-20	x	x	x	x
-45	x	x	x	x
-70	x	x	x	x

Tabelle B.1. Versuchsreihenliste für die initialen Geometrien 1D Sinus, 1D Ellipse und Ellipse

Zusätzlich wurden Versuche unter der Deformationsbedingung Einfacher Scherung mit einer Dehnungsrate von $\dot{\epsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$ durchgeführt, die den Einfluss der Ellipsengröße untersuchen sollten. Die Ellipse wies einen Auslenkwinkel von 45° auf, sowie ein Achsenverhältnis von 1 : 5. Es wurden die folgenden Größen untersucht: 50, 76, 100, 126, 140 Gitterpunkte für die Längsachse bei einer Gitterauflösung für das feine Gitter von $nxt \times nzt = 201 \times 201$. Es zeigte sich, dass alle Versuch, mit Ausnahme der 50er Ellipse (aufgrund mangelnder Gitterauflösung), zu den gleichen Ergebnissen führten.

C.1 Grundzustand (Basic state) für Reine Scherung

Der Grundzustand der relevanten fluiddynamischen Gleichungen (Massenerhaltung der Schmelze (Glg. 2.2), der Matrix (Glg. 2.3), Impulserhaltung der Schmelze (Glg. 2.4) und der Matrix (Glg. 2.5)) kann mit Hilfe der folgenden Vorüberlegungen berechnet werden:

Die Dehnungsraten in x - und z -Richtung sind bei Reiner Scherung gleich groß, weisen aber unterschiedliche Vorzeichen auf.

Sei $\dot{\epsilon}_0 > 0$, dann gilt

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{xx0} &= \dot{\epsilon}_0 \\ \dot{\epsilon}_{zz0} &= -\dot{\epsilon}_0.\end{aligned}\tag{C.1}$$

Dies resultiert unter Ausnutzung von Gleichung 2.9 in

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\Delta x_j}{\partial \Delta t} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_{si}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{sj}}{\partial x_i} \right) \tag{C.2}$$

mit einer Horizontalgeschwindigkeit u_{sx0} und einer Vertikalgeschwindigkeit u_{sz0} von

$$\begin{aligned}u_{sx0} &= x \dot{\epsilon}_{xx0} = x \dot{\epsilon}_0 \\ u_{sz0} &= -z \dot{\epsilon}_{zz0} = -z \dot{\epsilon}_0.\end{aligned}\tag{C.3}$$

Weiterhin soll gelten, dass φ_0 , η_{s0} , η_{b0} , $k_{\varphi 0}$ sowohl räumlich als auch zeitlich konstant sind.

Diese Vorüberlegungen führen zu nachfolgenden Grundzuständen:

C.1.1 Grundzustand Massenerhaltung der Schmelze

Der Grundzustand der Massenerhaltung der Schmelze ist

$$\underbrace{\frac{\partial \varphi_0}{\partial t}}_{=0} + \vec{\nabla} (\varphi_0 \vec{u}_{f0}) = 0 \quad \implies \quad \vec{\nabla} \vec{u}_{f0} = 0 \quad \implies \quad \frac{\partial u_{fz0}}{\partial z} = -\frac{\partial u_{fx0}}{\partial x}. \quad (\text{C.4})$$

C.1.2 Grundzustand Massenerhaltung der Matrix

Der Grundzustand der Massenerhaltung der Matrix ist

$$\underbrace{\frac{\partial (1 - \varphi_0)}{\partial t}}_{=0} + \vec{\nabla} [(1 - \varphi_0) \vec{u}_{s0}] = 0 \quad \implies \quad \vec{\nabla} \vec{u}_{s0} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Demnach ist der Grundzustand des Spannungstensors (Glg. 2.6)

$$\tau_{xx0} = 2\eta_{s0} \frac{\partial u_{sx0}}{\partial x} + \left(\eta_{b0} - \frac{2}{3} \eta_{s0} \right) \underbrace{\vec{\nabla} \vec{u}_{s0}}_{=0} = 2\eta_{s0} \dot{\epsilon}_0 \quad (\text{C.6})$$

$$\tau_{zz0} = 2\eta_{s0} \frac{\partial u_{sz0}}{\partial z} + \left(\eta_{b0} - \frac{2}{3} \eta_{s0} \right) \underbrace{\vec{\nabla} \vec{u}_{s0}}_{=0} = -2\eta_{s0} \dot{\epsilon}_0 \quad (\text{C.7})$$

$$\tau_{xz0} = \tau_{zx0} = 0. \quad (\text{C.8})$$

C.1.3 Grundzustand Impulserhaltung der Matrix

Den Grundzustand der Impulserhaltung der Matrix erhält man aus Gleichung 2.5 durch Vernachlässigung des Auftriebsterms. Gleichung 2.5 war gegeben durch

$$-\bar{p} g \delta_{iz} - \vec{\nabla} P + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{C.9})$$

Gleichung 2.5 wird demnach zu

$$-\nabla P + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (\text{C.10})$$

Eine Betrachtung der x -Richtung von Gleichung C.10 ergibt

$$-\frac{\partial P_0}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx0}}{\partial x} = 0. \quad (\text{C.11})$$

Gleichung C.10 kann leicht nach x integriert werden und liefert den Druck P_0 zu

$$P_0 = \tau_{xx0} + \underbrace{\text{konst.}}_{\equiv 0} \quad \Longrightarrow \quad P_0 = 2\eta_{s0}\dot{\epsilon}_0. \quad (\text{C.12})$$

C.1.4 Grundzustand Impulserhaltung der Schmelze

Zur Berechnung des Grundzustandes der Impulserhaltung der Schmelze ist der Druck P_0 nötig. Dieser ist durch Gleichung C.12 gegeben, Einsetzen von diesem liefert für die x -Richtung

$$u_{fx0} - u_{sxo} = -\frac{k_{\phi 0}}{\eta_f \varphi_0} \underbrace{\frac{\partial P_0}{\partial x}}_{=0} \quad \Longrightarrow \quad u_{fx0} = u_{sxo}. \quad (\text{C.13})$$

Ein analoges Vorgehen für die z -Richtung ergibt

$$u_{fz0} = u_{szo}. \quad (\text{C.14})$$

Somit sind alle Grundzustände der fünf Erhaltungsgleichungen bekannt.

C.2 Perturbation

Eine Lineare Stabilitätsanalyse nutzt die Grundzustände aus, addiert allerdings zu allen physikalisch relevanten Größen eine orts- und zeitabhängige Perturbation. In dieser linearen

Stabilitätsanalyse beschränken wir uns auf den eindimensionalen Fall, demnach hängt die Perturbation nur von x und t ab

$$\begin{aligned}\varphi(x, t) &= \varphi_0 + \delta\varphi(x, t) & \eta_s(x, t) &= \eta_{s0} + \delta\eta_s(x, t) & \eta_b(x, t) &= \eta_{b0} + \delta\eta_b(x, t) \\ \vec{u}_f(x, t) &= \vec{u}_{f0} + \delta\vec{u}_f(x, t) & \vec{u}_s(x, t) &= \vec{u}_{s0} + \delta\vec{u}_s(x, t).\end{aligned}\tag{C.15}$$

In den nachfolgenden Überlegungen werden die Klammerausdrücke weggelassen.

C.2.1 Rheologie

Im Nachfolgenden werden diese drei Rheologien verwendet, analog kann diese Herleitung auch für andere Rheologien durchgeführt werden. Es gilt

$$\tilde{\eta}_0 = \left(\frac{c_{s0}}{c_s}\right)^\beta \eta_{scal} \quad \text{Hall und Parmentier (2000)} \tag{C.16}$$

$$\eta_s = \tilde{\eta}_0 e^{-a_1 \varphi} \quad \text{Kohlstedt et al. (2000)} \tag{C.17}$$

$$\eta_b = \tilde{\eta}_0 \frac{c_1 (c_2 - \varphi)}{\varphi} \quad \text{Schmeling (2000).} \tag{C.18}$$

Die effektive Scherviskosität (Glg. C.17) kann folgendermaßen linearisiert werden

$$\eta_s = \tilde{\eta}_0 e^{-a_1 \varphi} \longrightarrow \eta_s = \underbrace{\tilde{\eta}_0 e^{-a_1 \varphi_0}}_{\eta_{s0}} e^{-a_1 \delta\varphi} = \eta_{s0} (1 - a_1 \delta\varphi) = \eta_{s0} + b_1 \delta\varphi \tag{C.19}$$

mit $b_1 = -\tilde{\eta}_0 e^{-a_1 \varphi_0} a_1$.

Entsprechend gilt für die effektive Volumenviskosität (Glg. C.18)

$$\begin{aligned}
 \eta_b &= \tilde{\eta}_0 \frac{c_1 (c_2 - \varphi)}{\varphi} \\
 &= \tilde{\eta}_0 \frac{c_1 c_2}{\varphi} - \tilde{\eta}_0 \frac{c_1 \varphi}{\varphi} \\
 &\stackrel{lin.}{=} \tilde{\eta}_0 \frac{c_1 c_2}{\varphi_0} \left(1 - \frac{\delta \varphi}{\varphi_0} \right) - \underbrace{\tilde{\eta}_0 c_1}_{\ll \eta_b(\varphi_0)} \\
 &\approx \eta_{b0} \left(1 - \frac{\delta \varphi}{\varphi_0} \right) \\
 &= \eta_{b0} - \frac{\eta_{b0}}{\varphi_0} \delta \varphi \\
 &= \eta_{b0} + b_2 \delta \varphi.
 \end{aligned} \tag{C.20}$$

C.2.2 Die Massenerhaltung der Schmelze mit Perturbation

Einsetzen der Perturbationsgleichungen C.15 in die Massenerhaltungsgleichung für die Schmelze (Glg. 2.2) liefert

$$\left(\dot{\varphi}_0 + \delta \dot{\varphi} \right) + (\varphi_0 + \delta \varphi) \vec{\nabla} (\vec{u}_{f0} + \delta \vec{u}_f) + (\vec{u}_{f0} + \delta \vec{u}_f) \vec{\nabla} (\varphi_0 + \delta \varphi) = 0.$$

Die ersten beiden Klammerausdrücke werden linearisiert, außerdem kann Gleichung C.4 ($\vec{\nabla} \vec{u}_{f0} = 0$) ausgenutzt werden

$$\delta \dot{\varphi} + \varphi_0 \vec{\nabla} (\delta \vec{u}_f) + \vec{u}_f \vec{\nabla} (\varphi_0 + \delta \varphi) = 0.$$

Der letzte Klammerausdruck wird ebenfalls linearisiert, sowie die Ableitungen $\vec{\nabla} \varphi_0 = 0$ vernachlässigt

$$\delta \dot{\varphi} + \varphi_0 \vec{\nabla} (\delta \vec{u}_f) + \vec{u}_{f0} \vec{\nabla} (\delta \varphi) = 0.$$

Wird nur die x -Richtung mit $' = \frac{\partial}{\partial x}$ betrachtet, ergibt sich

$$\dot{\delta\varphi} + \varphi_0 \underbrace{\delta u'_{fx}}_{f(x)} + u_{fx0} \delta\varphi' = 0. \quad (\text{C.21})$$

C.2.3 Die Massenerhaltung der Matrix mit Perturbation

Einsetzen der Perturbationsgleichungen C.15 in die Massenerhaltungsgleichung für die Matrix (Glg. 2.3) liefert

$$\frac{\partial(1 - \varphi_0 - \delta\varphi)}{\partial t} + (1 - \varphi_0 - \delta\varphi) \vec{\nabla} (\vec{u}_{s0} + \delta\vec{u}_s) + (\vec{u}_{s0} + \delta\vec{u}_s) \vec{\nabla} (1 - \varphi_0 - \delta\varphi) = 0.$$

Dies wird ebenfalls linearisiert, und weiterhin kann Gleichung C.5 ($\vec{\nabla} \vec{u}_{s0} = 0$) ausgenutzt werden

$$-\dot{\delta\varphi} + (1 - \varphi_0) \vec{\nabla} (\delta\vec{u}_s) - \vec{u}_{s0} \vec{\nabla} (\delta\varphi) = 0.$$

Dies ergibt für die x -Richtung, mit $' = \frac{\partial}{\partial x}$

$$-\dot{\delta\varphi} + (1 - \varphi_0) \delta u'_{sx} - u_{sx0} \delta\varphi' = 0. \quad (\text{C.22})$$

Aus einer Addition von Gleichung C.21 und Gleichung C.22 unter Ausnutzung von $u_{fx0} = u_{sx0}$ (Glg. C.13) folgt

$$\varphi_0 \delta u'_{fx} + (1 - \varphi_0) \delta u'_{sx} = 0. \quad (\text{C.23})$$

Dementsprechend ist die Spannung gegeben durch

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= 2\eta_s u'_{sx} + \left(\eta_b - \frac{2}{3}\eta_s \right) \vec{\nabla} \vec{u}_s \\
 \tau_{xx0} + \delta\tau_{xx} &= 2(\eta_{s0} + \delta\eta_s) (u'_{sx0} + \delta u'_{sx}) + \left(\eta_{b0} - \frac{2}{3}\eta_{s0} \right) \vec{\nabla} (\delta \vec{u}_s) \\
 \tau_{xx0} + \delta\tau_{xx} &= 2\eta_{s0} \underbrace{u'_{sx0}}_{=\dot{\epsilon}_0} + 2\delta\eta_s \underbrace{u'_{sx0}}_{=\dot{\epsilon}_0} + 2\eta_{s0} \delta u'_{sx} + \left(\eta_{b0} - \frac{2}{3}\eta_{s0} \right) \delta u'_{sx}.
 \end{aligned} \tag{C.24}$$

C.2.4 Reduzierter Grundzustand

Ein „reduzierter“ Grundzustand kann aufgestellt werden, indem der Spannungstensor des Grundzustandes (Glg. C.6) von dem der Perturbation (Glg. C.24) subtrahiert wird

$$\begin{aligned}
 \delta\tau_{xx} &= 2\delta\eta_s \dot{\epsilon}_0 + 2\eta_{s0} \delta u'_{sx} + \left(\eta_{b0} - \frac{2}{3}\eta_{s0} \right) \delta u'_{sx} \\
 \delta\tau_{xx} &= 2\delta\eta_s \dot{\epsilon}_0 + \left(\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0} \right) \delta u'_{sx}.
 \end{aligned} \tag{C.25}$$

C.2.5 Die Impulserhaltung der Matrix des reduzierten Grundzustandes

Einsetzen der Perturbationsgleichungen C.15 in die Impulserhaltungsgleichung der Matrix C.10

$$-\frac{\partial}{\partial x} (P_0 + \delta P) + \frac{\partial}{\partial x} \tau_{xx} = 0, \tag{C.26}$$

ergibt nach einer Integration nach x

$$\delta P = \delta\tau_{xx} + \underbrace{\text{konst.}}_{=0}. \tag{C.27}$$

C.2.6 Die Impulserhaltung der Schmelze des reduzierten Grundzustandes

Einsetzen der Perturbationsgleichungen C.15 in die Impulserhaltungsgleichung der Schmelze C.13

$$u_{fx} - u_{sx} = -\frac{k_\varphi}{\eta_f \varphi} \frac{\partial P_0}{\partial x}, \quad (\text{C.28})$$

ergibt

$$\begin{aligned} \delta u_{fx} - \delta u_{sx} &= -\frac{k_{\varphi_0}}{\eta_f \varphi_0} \delta P' = -\frac{k_{\varphi_0}}{\eta_f \varphi_0} \delta \tau'_{xx} = -K \delta \tau'_{xx} \\ \delta u_{fx} &= \delta u_{sx} - K \delta \tau'_{xx}. \end{aligned} \quad (\text{C.29})$$

C.3 Konvektive Ableitung der Massenerhaltung der Schmelze

Die konvektive Ableitung ist gegeben durch

$$\dot{\delta\varphi} + \underbrace{u_{fx0}}_{=u_{sx0}} \delta\varphi' \equiv \frac{D\delta\varphi}{Dt}. \quad (\text{C.30})$$

Durch diese Definition kann die Massenerhaltungsgleichung der Schmelze (Glg. C.21) umgeschrieben werden

$$\frac{D\delta\varphi}{Dt} = -\varphi_0 \delta u'_{fx}. \quad (\text{C.31})$$

Wird nun von Gleichung C.29 eine Ableitung nach x gebildet, kann $\delta u'_{fx}$ in Gleichung C.31 ersetzt werden. Es folgt

$$\frac{D\delta\varphi}{Dt} = -\varphi_0 \left(\delta u'_{sx} - K \delta \tau''_{xx} \right). \quad (\text{C.32})$$

Unter Ausnutzen von Gleichung C.25 kann Gleichung C.32 weiter vereinfacht werden

$$\frac{D\delta\varphi}{Dt} = -\varphi_0 \left(\delta u'_{sx} - K \left[2\dot{\varepsilon}_0 \delta \eta''_s + \left(\eta_{b0} + \frac{4}{3} \eta_{s0} \right) \delta u'''_{sx} \right] \right). \quad (\text{C.33})$$

Die Lösung der linearen Stabilitätsanalyse ist so weit fortgeschritten, dass nur noch δu_{sx} durch φ ausgedrückt werden muss. Dies kann durch die Massenerhaltung der Matrix erfolgen.

C.4 Konvektive Ableitung der Massenerhaltung der Matrix

Die Massenerhaltungsgleichung der Matrix (Glg. C.22) kann ebenfalls durch eine konvektive Ableitung (Glg. C.30) ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}\dot{\delta\varphi} + u_{sx0}\delta\varphi' &= \frac{D\delta\varphi}{Dt} = (1 - \varphi_0) \delta u'_{sx} \\ \delta u'_{sx} &= \frac{1}{1 - \varphi_0} \frac{D\delta\varphi}{Dt}.\end{aligned}\tag{C.34}$$

Wird anschließend Gleichung C.34 in Gleichung C.33 eingesetzt, folgt

$$\begin{aligned}\frac{D\delta\varphi}{Dt} &= -\varphi_0 \left(\frac{1}{1 - \varphi_0} \frac{D\delta\varphi}{Dt} - K \left[2\dot{\varepsilon}_0 \delta\eta_s'' + \left(\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0} \right) \frac{1}{1 - \varphi_0} \left(\frac{D\delta\varphi}{Dt} \right)'' \right] \right) \\ \frac{D\delta\varphi}{Dt} \left(1 + \frac{\varphi_0}{1 - \varphi_0} \right) &= +\varphi_0 K \left[2\dot{\varepsilon}_0 b_1 \delta\varphi'' + \frac{\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}}{1 - \varphi_0} \left(\frac{D\delta\varphi}{Dt} \right)'' \right].\end{aligned}\tag{C.35}$$

C.5 Die Partikelpfadgleichung der Porositätsamplitude

Die Amplitude der harmonischen Perturbation steigt mit $e^{\alpha t}$ an, wird aber, bedingt durch das Strömungsfeld, um den Faktor $\dot{\varepsilon}_{xx0}$ gedehnt. Demnach ist die Wellenlänge eine zeitabhängige Funktion. Die zeitliche Änderung kann durch eine homogene Partikelpfadgleichung (Glg. C.36) beschrieben werden

$$\frac{\partial \vec{x}_p}{\partial t} = \vec{v}(\vec{x}_p).\tag{C.36}$$

Die Partikelpfadgleichung, angewendet auf die sich zeitlich ändernde Wellenlänge, lautet

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \lambda}{\partial t} &= u_{sx0}(\lambda) \\
 &= x|_{\lambda} \dot{\varepsilon}_0 = \lambda \dot{\varepsilon}_0 \\
 \int_{\lambda_0}^{\lambda} \frac{d\lambda}{\lambda} &= \dot{\varepsilon}_0 dt \\
 \lambda &= \lambda_0 e^{\dot{\varepsilon}_0 t}.
 \end{aligned} \tag{C.37}$$

Wird die Wellenlänge λ durch die Wellenzahl k ausgedrückt, so ist

$$k(t) = \frac{2\pi}{\lambda} = k_0 e^{-\dot{\varepsilon}_0 t}. \tag{C.38}$$

C.6 Lösungsansatz

Folgender Ansatz kann für die Perturbation gewählt werden

$$\delta\varphi = \delta\varphi_0 \cos(\underbrace{k_0 e^{-\dot{\varepsilon}_0 t}}_{k(t)} x) e^{\alpha t} = \delta\varphi_0 \cos(k(t) x) e^{\alpha t}. \tag{C.39}$$

In Gleichung C.35 tritt die konvektive Ableitung $\frac{D\delta\varphi}{Dt}$ auf. Nach deren Definition (Glg. C.30) setzt sie sich aus einer Zeit- und einer Ortsableitung zusammen

$$\frac{\partial \delta\varphi}{\partial t} = \delta\varphi_0 \alpha \cos(\dots) e^{\alpha t} = \delta\varphi \alpha, \tag{C.40}$$

und $\left(\frac{D\delta\varphi}{Dt}\right)''$ wird zu

$$\left(\frac{D\delta\varphi}{Dt}\right)'' = (\alpha \delta\varphi)'' = -\alpha k^2 \delta\varphi. \tag{C.41}$$

Folglich ergibt sich mit dem Ansatz (Glg. C.39) die konvektive Ableitung zu

$$\frac{D\delta\varphi}{Dt} = \delta\varphi \alpha (1 - k^2). \tag{C.42}$$

C.7 Lösung des Kanalisierungsinstabilitäts-Problems

Aufgrund der vorhergegangenen Überlegungen kann Gleichung C.35 nach der Wachstumsrate α aufgelöst werden

$$\delta\varphi\alpha\frac{1}{1-\varphi_0} = +\varphi_0 K \left[2\dot{\varepsilon}_0 b_1 (-k^2 \delta\varphi) + \frac{\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}}{1-\varphi_0} (-\alpha k^2 \delta\varphi) \right] \quad (\text{C.43})$$

$$\alpha \left(\frac{1}{1-\varphi_0} + \frac{(\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}) \varphi_0 K k^2}{1-\varphi_0} \right) = -\varphi_0 K 2\dot{\varepsilon}_0 b_1 k^2 \quad (\text{C.44})$$

$$\alpha = \frac{-(1-\varphi_0) \varphi_0 K 2\dot{\varepsilon}_0 b_1 k^2}{1 + (\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}) \varphi_0 K k^2}. \quad (\text{C.45})$$

Mit $K = k_{\varphi_0}/\eta_f \varphi_0$ und $b_1 = -\eta_{s0} a_1$ ergibt sich die Wachstumsrate α zu

$$\alpha = \frac{(1-\varphi_0) \frac{k_{\varphi_0}}{\eta_f} 2\dot{\varepsilon}_0 \eta_{s0} a_1 k^2}{1 + (\eta_{b0} + \frac{4}{3}\eta_{s0}) \frac{k_{\varphi_0}}{\eta_f} k^2}. \quad (\text{C.46})$$

Es ist sinnvoll, die Wachstumsrate α mit der Dehnungsrate $\dot{\varepsilon}_{xz}$ zu normieren

$$\alpha' = \frac{\alpha}{\dot{\varepsilon}_{xz}}. \quad (\text{C.47})$$

Weiterhin kann für große Wellenzahlen abgeschätzt werden, dass die normierte Wachstumsrate in der Größenordnung von a_1 liegt

$$\alpha'_{max} = O(a_1). \quad (\text{C.48})$$

Für eine bessere Handhabung kann der η_f -Term in Gleichung C.46 durch die Schmelz-Retentionzahl Rtn ersetzt werden. Es gilt

$$Rtn = \frac{\eta_f b h^2}{\eta_{scal} a^2} \quad k_{\varphi_0} = \frac{a^2}{b} \varphi_0^n. \quad (\text{C.49})$$

Die Wachstumsrate α ergibt sich dann zu

$$\alpha = \frac{(1 - \varphi_0) 2\dot{\varepsilon}_0 a_1 k^2 \frac{h_{Rtn}^2 \varphi_0^n e^{-a_1 \varphi_0}}{Rtn} \left(\frac{c_{s0}}{c_s} \right)^\beta}{1 + \left(\eta_{b0} + \frac{4}{3} \eta_{s0} \right) k^2 \frac{h^2 \varphi_0^n}{Rtn \eta_{scal}}}. \quad (C.50)$$

C.8 Auswirkungen der CBA

Die ursprüngliche Spannungsgleichung (Glg. C.24) ist

$$\tau_{xx} = 2\eta_s u'_{sx} + \left(\eta_b - \frac{2}{3} \eta_s \right) \vec{\nabla} \vec{u}_s.$$

Wird die CBA in den Rechnungen berücksichtigt, so wird der Term $-2/3\eta_s$ vernachlässigt, dementsprechend ergibt sich τ_{xx} zu

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\eta_s u'_{sx} + \eta_b \vec{\nabla} \vec{u}_s \\ \tau_{xx0} + \delta\tau_{xx} &= 2(\eta_{s0} + \delta\eta_s) \left(u'_{sx0} + \underbrace{\delta u'_{sx}}_{=0} \right) + \eta_b \vec{\nabla} (\delta \vec{u}_s) \\ \tau_{xx0} + \delta\tau_{xx} &= 2\eta_{s0} u'_{sx0} + 2\delta\eta_s u'_{sx0} + \underbrace{2\eta_0 \delta u'_{sx}}_{=0} + \eta_{b0} \delta u'_{sx}. \end{aligned} \quad (C.51)$$

Für den „reduzierten“ Grundzustand (Glg. C.25) gilt demzufolge

$$\delta\tau_{xx} = 2\delta\eta_s \dot{\varepsilon}_0 + \eta_{b0} \delta u'_{sx}. \quad (C.52)$$

Folglich müssen im vorherigen Kapitel alle Terme, in denen der Faktor $+\frac{4}{3}$ auftaucht, gestrichen werden. So ergibt sich unter Prämisse der CBA aus Gleichung C.46 die Wachstumsrate

α_{CBA} zu

$$\alpha_{CBA} = \frac{(1 - \varphi_0) \frac{k_{\varphi 0}}{\eta_f} 2\dot{\varepsilon}_0 \eta_{s0} a_1 k^2}{1 + \eta_{b0} \frac{k_{\varphi 0}}{\eta_f} k^2}. \quad (C.53)$$

Es gilt, die effektive Scherviskosität eines Gebietes, welches in vertikale Bereiche unterschiedlicher Porositäten aufgeteilt ist, zu berechnen. Es seien φ_1 , η_1 und d_1 die Parameter des einen Bereiches und φ_2 , η_2 und d_2 die Parameter des anderen. Für die Gesamtporosität φ_0 des Gebietes der Länge $d = d_1 + d_2$ gilt

$$\varphi_0 = \frac{d_1}{d}\varphi_1 + \frac{d_2}{d}\varphi_2 = d'_1\varphi_1 + d'_2\varphi_2. \quad (\text{D.1})$$

Die Scherviskosität ist mit $\eta_s = \eta_m e^{-a_1\varphi}$ (Glg. 2.6.1) gegeben durch

$$\eta_1 = \eta_m e^{-a_1\varphi_1} \qquad \eta_2 = \eta_m e^{-a_1\varphi_2}. \quad (\text{D.2})$$

Somit ist die Gesamtscherviskosität bestimmt durch

$$\eta_{eff} = \eta_1 d'_1 + \eta_2 d'_2. \quad (\text{D.3})$$

Werden nun d'_1 und d'_2 in der vorherigen Gleichung mit Hilfe der Porositäts-Längenbeziehung aus Gleichung D.1 und der Nebenbedingung, dass es sich um ein Einheitsgebiet der Länge $d = 1$ handelt, ersetzt, so folgt

$$\eta_{eff} = \eta_1 \left(1 - \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1} \right) + \eta_2 \frac{\varphi_0 - \varphi_1}{\varphi_2 - \varphi_1}. \quad (\text{D.4})$$

Unter den weiteren Nebenbedingungen, dass $\varphi_1 = \varphi_0 - \delta\varphi$ und $\varphi_2 = \varphi_0 + \delta\varphi$ sind, ergibt sich die effektive Scherviskosität als das volumetrische gewichtete Mittel der einzelnen Viskositäten zu

$$\eta_{theo,eff} = \frac{\eta_1 + \eta_2}{2}. \quad (\text{D.5})$$

ABBILDUNGSVERZEICHNIS

1.1	Struktureller Aufbau des oberen Mantels unter einem Mittel-Ozeanischen-Rücken (RAMESSES Projekt).	3
2.1	Diffusionszeiten in Abhängigkeit der Diffusionslänge	21
2.2	Verwendetes Koordinatensystem	27
2.3	Skizze Einfache Scherung	30
2.4	Skizze Reine Scherung	32
3.1	Schematische Darstellung der Kanalisierungsinstabilität	45
3.2	Exemplarischer Verlauf der Wachstumsrate $\alpha'(k')$	46
4.1	Porositäts- und Wasserverteilung am Beispiel eines Scherdehnungsexperi- mentes	54
5.1	Fehlerordnungstest Teil I	60
5.2	Beispiel der numerischen Diffusion an realen Porositätsverteilungen	62
6.1	Porositäts-Positions-Kurven	68
6.2	Die Wachstumsrate $\alpha'(k_{rheo}, Rheo)$	73
6.3	Die Wachstumsrate $\alpha(a_1, k'_{mckcba} = konst.)$	75
6.4	Die Wachstumsrate $\alpha'(a_1, k'_{mckcba})$	76
6.5	Studie zur Auflösung des FDCON-Gitters	78
6.6	Die Porositätsfelder der initialen Geometrien	81
6.7	Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$	82

6.8	Numerische Diffusion 1D Ellipse	83
6.9	Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma, Num.Diff)$	84
6.10	Fehlerkurvenkorrektur	85
6.11	Analyse eines 1D Ellipsenquerschnitts	87
6.12	Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$ für einen 1D Sinus (ES)	88
6.13	Maximalporosität vs. Scherdehnung (1D Sinus, ES, 45° , $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, $\varepsilon_{xz} < 0.06$)	90
6.14	Maximalporosität vs. Scherdehnung (1D Sinus, ES, 45° , $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$) .	91
6.15	Porositätsverteilung vs. Scherdehnung (ES, 45° , $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)	93
6.16	Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$ für eine 1D Ellipse (ES)	94
6.17	Powerspektren für diverse initiale Porositätsverteilungen	95
6.18	Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$ für eine Ellipse (ES)	97
6.19	Die effektive Wachstumsrate für diverse Porositätsstrukturen	99
6.20	Die Wachstumsrate $\alpha'(\gamma)$ für alle initialen Strukturen (RS)	100
6.21	Porositätsverteilung bei einer Superpositionierung 25% ES und 75% RS . .	103
6.22	Die Wirbelstärke Γ' des oberen Mantels (Plume + MOR)	104
6.23	Powerspektrum der zufälligen Porositätsverteilungen	104
6.24	Porositätsverteilung vs. Scherdehnung (zufällige Verteilung, ES, $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, $\varepsilon_{xz} \leq 0.39$, kleine Box)	106
6.25	Die Wachstumsrate der Holtzman-Experimente	108
6.26	Porositätsverteilung vs. Scherdehnung (zufällige Verteilung, ES, $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, kleine Box)	111
6.27	Detaillauswertung I der zufälligen Porositätsverteilung (ES, $\dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)	113

6.28	Detailauswertung II der zufälligen Porositätsverteilung ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)	114
6.29	Kanalbildungsstadien ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, kleine Box)	116
6.30	Die Minimierung der Dissipationsrate	118
6.31	Porositätsverteilung vs. Scherdehnung (zufällige Verteilung, $ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, große Box)	122
6.32	Porositätsverteilung vs. Scherdehnung (zufällige Verteilung, $ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$, Ausschnitt aus der großen Box)	123
6.33	Detailauswertung I der zufälligen Porositätsverteilung, große Box ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)	124
6.34	Detailauswertung II der zufälligen Porositätsverteilung, große Box ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)	125
6.35	Porositätsverteilung vs. Scherdehnungsrate ($ES, \varepsilon_{xz} \approx 0.8, AZ = 0.035, Rtn = 0.5$)	127
6.36	Porositätsverteilung vs. Auftriebszahl I ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}, \varepsilon_{xz} \approx 0.8, AZ \leq 0.035, Rtn = 0.5$)	129
6.37	Porositätsverteilung vs. Auftriebszahl II ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}, \varepsilon_{xz} \approx 0.8, AZ \geq 0.070, Rtn = 0.5$)	130
6.38	Die horizontale Kanalüberschuss-Durchflussmenge vs. Scherdehnung und Rtn ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$)	131
6.39	Die horizontale Kanalüberschuss-Durchflussmenge vs. AZ und Rtn ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}, \varepsilon_{xz} = 0.8$)	132
6.40	Porositätsverteilung vs. Scherdehnung ($ES, \dot{\varepsilon}_{xz} = 1.25 \cdot 10^{-11} \text{ s}^{-1}, AZ \geq 0.035, Rtn = 0.5$)	133

6.41	Temperatur-, Porositäts- und Aufstiegsgeschwindigkeitsverteilung eines Plumes, der mit einem MOR interagiert	137
6.42	Auslenkwinkel eines Plumes, der mit einem MOR interagiert	138
6.43	Auflösungsgrenze der Versuchsreihe Interaktion eines Plumes mit einem MOR	141
6.44	Auswertung I (T, γ, φ) der Versuchsreihe Interaktion eines Plumes mit einem MOR	142
6.45	Auswertung II (T, γ, φ) der Versuchsreihe Interaktion eines Plumes mit einem MOR	143

6.1	Untersuchungsparameter der Versuchsreihe:	
	Reproduziert FDCON die analytische Wachstumsrate?	72
6.2	Parameterkombinationen für die Versuchsreihe:	
	ES , $AZ = 0.035$, $Rtn = 0.5$ und $\varepsilon_{xz} = variabel$	126
6.3	Parameterkombinationen für die Versuchsreihe:	
	ES , $AZ = variabel$, $Rtn = variabel$ und $\varepsilon_{xz} = 10^{-10} \text{ s}^{-1}$	126
6.4	Parameterkombinationen der Versuchsreihe:	
	Interaktion eines Plumes mit einem MOR	136
A.1	Verwendete Symbole	156
A.2	Wertebereich einzelner Größen	157
B.1	Versuchsreihenliste für die initialen Geometrien	
	1D Sinus, 1D Ellipse und Ellipse	159

- Aharonov, E., Whitehead, J., Kelemen, P., and Spiegelman, M. (1995). Channeling instability of upwelling melt in the mantle. *Journal of Geophysical Research*, **100**(B10), 20433–20450.
- Ahrens, T. (1989). Water storage in the mantle. *Nature*, **342**, 122–123.
- Allen, R., Nolet, G., Morgan, W., Vogfjord, K., Bergsson, B., Erlendsson, P., Foulger, G., Jakobsdottir, S., Julian, B., Pritchard, M., Ragnarsson, S., and Stefansson, R. (2002). Imaging the mantle beneath Iceland using integrated seismological techniques. *Journal of Geophysical Research-Solid Earth*, **107**(B12), 2325.
- Basu, S. (2002). Earth’s mantle composition - present understanding. *Current Science*, **82**, 111–113.
- Beach, A. (1975). The geometry of en echelon vein arrays. *Tectonophysics*, **28**, 245–263.
- Becker, A. and Gross, M. (1999). Sigmoidal wall-rock fragments: application to the origin, geometry and kinematic of en echelon vein arrays. *Journal of Structural Geology*, **21**, 703–710.
- Bercovici, D. and Karato, S. (2003). Whole-mantle convection and the transition-zone water filter. *Nature*, **425**, 39–44.
- Bercovici, D., Ricard, Y., and Schubert, G. (2001). A two-phase model for compaction and damage, 3, applications to shear localization and plate boundary formation. *Journal of Geophysical Research*, **106**, 8925–8940.
- Bolfan-Casanova, N., Keppler, H., and Rubie, D. (2000). Water partitioning between nominally anhydrous minerals in the MgO-SiO₂-H₂O system up to 24 GPa: implications for the distribution of water in the earth’s mantle. *Earth and Planetary Science Letters*, **3-4**, 209–221.

- Boussinesq, J. (1903). Théorie analytique de la chaleur, mise en harmonie avec la thermodynamique et avec la théorie mécanique de la lumière. *Paris: Gauthier-Villars*, **2**.
- Dick, H. (1977). Partial melting in the josephine peridotit I, the effect on mineral composition and its consequence for geobarometry and geothermometry. *American Journal of Science*, **277**, 801–832.
- Enns, A. (2002). Thermischer Parameter, Temperaturen und Erdbebenverteilung in Subduktionszonen. Master's thesis, J.W. Goethe Universität Frankfurt a.M., Institut für Meteorologie und Geophysik.
- Faul, U. (1997). Permeability of partially molten upper mantle rocks from experiments and percolation theory. *Journal of Geophysical Research*, **102**(B5), 10,299–10,311.
- Forsyth, D., Scheirer, D., Webb, S., Dorman, L., Orcutt, J., Harding, A., D.K. Blackman, J. M., Detrick, R., Shen, Y., Wolfe, C., Canales, J., Toomey, D., Sheehan, A., Solomon, S., and Wilcock, W. (1998). Imaging the deep seismic structure beneath a mid-ocean ridge: The MELT experiment. *Science*, **280**, 1215–1218.
- Gottschaldt, K. (1997). *Periodische Randbedingungen bei der zweidimensionalen numerischen Modellierung von Konvektion im Erdmantel*. Ph.D. thesis, Friedrich-Schiller-Universität Jena, Institut für Geowissenschaften.
- Hall, C. and Parmentier, E. (2000). Spontaneous melt localization in a deforming solid with viscosity variations due to water weakening. *Geophysical Research Letters*, **27**(1), 9–12.
- Hall, P. S. and Kincaid, C. (2003). Melting, dehydration, and the dynamics of off-axis plume-ridge interaction. *Geochem. Geophys. Geosys.*, **4**(9), 1–19.
- Hancock, P. (1972). The analysis of en echelon veins. *Geol. Mag.*, **109**(3), 269–276.
- Hart, S. (1993). Equilibration during mantle melting: A fractal tree model. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **90**(24), 11,914–11,918.

- Hirth, G. and Kohlstedt, D. (1996). Water in the oceanic upper mantle: implications for rheology, melt extraction and the evolution of the lithosphere. *Earth and Planetary Science Letters*, **144**, 93–108.
- Hofmann, A. W. (2003). Just add water. *Nature*, **425**, 24–25.
- Holtzman, B., Groebner, N., Zimmerman, M., Ginsberg, S., and Kohlstedt, D. (2003). Stress-driven melt segregation in partially molten rocks. *Geochemistry Geophysics Geosystems*, **4**(5), 1–26.
- Inoue, T. (1994). Effect of water on melting phase relations and melt composition in the system $\text{Mg}_2\text{SiO}_4\text{-MgSiO}_3\text{-H}_2\text{O}$ up to 15 GPa. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, **85**, 237–263.
- Karato, S.-I. (2003). *The dynamic structure of the deep earth*. Princeton University Press, Princeton and Oxford.
- Kelemen, P., Whitehead, J., Aharonov, E., and Jordahl, K. (1995). Experiments on flow focusing in soluble porous media, with application to melt extraction from the mantle. *Journal of Geophysical Research*, **100**, 475–496.
- Kelemen, P., Hirth, G., Shimizu, N., Spiegelman, M., and Dick, H. (1997). A review of melt migration processes in the adiabatically upwelling mantle beneath oceanic spreading ridges. *Philos. Trans. R. Soc.*, **355**, 283–318.
- Kelemen, P., Braun, M., and Hirth, G. (2000). Spatial distribution of melt conduits in the mantle beneath oceanic spreading ridges: Observations from the ophiolites and oman ophiolites. *Geochemistry Geophysics Geosystems* **G3**, **1**(1999GC000012), 1525–2027.
- Kohlstedt, D., Bai, Q., Wan, Z., and Mei, S. (2000). Rheology of partially molten rocks. In N. Bagdassarov, D. Laporte, and A. B. Thompson, Hrsg., *Physics and chemistry of partially molten rocks*, Kapitel 1, Seiten 1–28. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

- Kokfelt, T., Hoernle, K., and Hauff, F. (2003). Upwelling and melting of the iceland plume from radial variation of ^{238}U – ^{230}Th disequilibria in postglacial volcanic rocks. *Earth and Planetary Science Letters*, **214**, 167–186.
- Kühn, D. (2005). *Magma ascent by dykes and crust formation at spreading centres*. Ph.D. thesis, Universität Hamburg.
- Kushiro, I. (1986). Viscosity of partial melts in the upper mantle. *Journal of Geophysical Research*, **91**(B9), 9343–9350.
- Lowrie, W. (2003). *Fundamentals of Geophysics*. Cambridge University Press.
- Mandl, G. (1987). Tectonic deformation by rotating parallel faults: The bookshelf mechanism. *Tectonophysics*, **141**, 277–316.
- Maumus, J. (2004). *Partial melting of crustal and mantle rocks under pressure from impedance spectroscopy measurements*. Ph.D. thesis, J.W. Goethe Universität Frankfurt.
- McKenzie, D. (1984). The generation and compaction of partially molten rock. *Journal of Petrology*, **25**, 713–765.
- Means, W., Hobbs, B., Lister, G., and Williams, P. (1980). Vorticity and non-coaxiality in progressive deformations. *Journal of Structural Geology*, **2**(3), 2325.
- Mei, S., Bai, W., Hirage, T., and Kohlstedt, D. (2002). Influence of melt on the creep behavior of olivine-basalt aggregates under hydrous conditions. *Earth and Planetary Science Letters*, **201**(3-4), 491–507.
- Murakami, M., Hirose, K., Yurimoto, H., Nakashima, S., and Takafuji, N. (2002). Water in earth's lower mantle. *Science*, **295**, 1885–1887.
- Nicolas, A. (1986). A melt extraction model based on structural studies in mantle peridotites. *Journal of Petrology*, **27**, 999–1022.

- Olson, J. and Pollard, D. (1991). The initiation and growth of en echelon veins. *Journal of Structural Geology*, **13**(5), 595–608.
- Peacock, S. M. (1990). Fluid processes in subduction zones. *Science*, **248**, 329–337.
- Press, W., Teukolsky, S., Vetterling, W., and Flannery, B. (1992). *Numerical recipes in fortran secound edition*. Cambridge University Press.
- Rabinowicz, M. and Vigneresse, J.-L. (2004). Melt segregation under compaction and shear channeling: Application to granitic magma segregation in a continental crust. *Journal of Geophysical Research*, **109**.
- Ribe, N., Christensen, U., and Theissig, J. (1995). The dynamics of plume-rige interaction, 1: Ridge-centered plumes. *Earth and Planetary Science Letters*, **134**, 155–168.
- Richardson, C. (1998). Melt flow in a variable viscosity matrix. *Geophysical Research Letters*, **25**(7), 1099–1102.
- Richardson, C., Lister, J., and McKenzie, D. (1996). Melt conduits in a viscous porous matrix. *Journal of Geophysical Research*, **101**(B9), 20,423–20,432.
- Ringwood, A. (1975). *Composition and structure of the Earth's Mantle*. McGraw-Hill, New York.
- Ruedas, T. (2004). *Convection and Melting Processes in a Mantle Plume under a Spreading Ridge, with Application to the Iceland Plume*. Ph.D. thesis, J.W. Goethe Universität Frankfurt, Institut für Geophysik.
- Schmeling, H. (1985). Numerical models on the influence of partial melt on elastic, anelastic, and electric properties of rocks. *Phys. Earth Planet. Int.*, **41**, 34–57.
- Schmeling, H. (1990). *Numerische Methoden in der Geophysik*. Universität Bayreuth, Bayerisches Geoinstitut.

- Schmeling, H. (2000). Partial melting and melt segregation in a convecting mantle. In N. Bagdassarov, D. Laporte, and A. B. Thompson, Hrsg., *Physics and chemistry of partially molten rocks*, Kapitel 5, Seiten 141–178. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
- Seyler, M., Toplis, M., Lorand, J., Luguët, A., and Cannat, M. (2001). Clinopyroxene microtextures reveal incompletely extracted melts in abyssal peridotites. *Geology*, **29**(2), 155–158.
- Shaw, D. (1970). Trace element fractionation during anatexis. *Geochimica et Cosmochimica Acta*, **34**, 237–243.
- Sinha, M. C., Constable, S. C., Peirce, C., White, A., Heinson, G., MacGregor, L. M., and Navin, D. A. (1998). Magmatic processes at slow spreading ridges: implications of the RAMESSES experiment at 57°45'N on the Mid-Atlantic Ridge. *Geophysical Journal International*, **135**(3), 731–745.
- Sleep, N. H. (1988). Tapping of melt by veins and dikes. *Journal of Geophysical Research*, **93**(B9), 10255–10272.
- Sleep, N. H. (1990). Hotspots and mantle plumes: Some phenomenology. *Journal of Geophysical Research*, **95**(B5), 6715–6736.
- Smith, J. (1999). Inter-array and intra-array kinematics of en echelon sigmoidal veins in cross-bedded sandstone, Merimbula, southeastern Australia. *Journal of Structural Geology*, **21**, 387–397.
- Sobolev, A. and Chaussidon, M. (1995). H₂O concentrations in primary melts from supra-subduction zones and mid-ocean ridges: Implication for H₂O storage and recycling in the mantle. *Earth and Planetary Science Letters*, **137**, 45–55.
- Sparks, D. and Parmentier, E. (1994). The generation and migration of partial melt beneath ocean spreading centers. In M. P. Ryan, Hrsg., *Magmatic Systems*, Seiten 55–76. Academic Press.

- Spiegelman, M. (2003). Linear analysis of melt band formation by simple shear. *Geochem. Geophys. Geosys.*, **4**(9), 1–14.
- Spiegelman, M., Kelemen, P., and Aharonov, E. (2001). Causes and consequences of flow organization during melt transport: The reaction infiltration instability in compactible media. *Journal of Geophysical Research*, **106**(B2), 2061–2077.
- Stevenson, D. (1989). Spontaneous small-scale melt segregation in partial melts undergoing deformation. *Geophysical Research Letters*, **16**(9), 1067–1070.
- Stolper, E. (1980). A phase diagram for mid-ocean ridge basalts: Preliminary results and implications for petrogenesis. *Contrib. Mineral. Petrol.*, **75**, 13–27.
- Suhr, G. (1998). *Melt migration under oceanic ridges: inferences from reactive transport modeling of upper mantle hosted dunites*. Ph.D. thesis, Universität zu Köln, Mineralogisch-Geochemisches Institut.
- Thompson, A. (1992). Water in the earth's mantle. *Nature*, **358**, 295–302.
- Turcotte, D. and Schubert, G. (2002). *Geodynamics Second Edition*. Cambridge University Press.
- Vera, E., Mutter, J., Buhl, P., Orcutt, J., Harding, A., Kappus, M., Detrick, R., and Brocher, T. (1990). The structure of 0- to 0.2-m.y.-old oceanic crust at 9 degrees N on the east pacific rise from expanded spread profiles. *Journal of Geophysical Research*, **95**, 15529–15556.
- Walte, N. (2004). *The grain-scale distribution and behavior of melt and fluid in crystalline analogue systems*. Ph.D. thesis, J. Gutenberg-Universität Mainz, Geowissenschaften.
- Watson, E. (1994). Diffusion in volatile-bearing magmas. In M. Carroll and J. Holloway, Hrsg., *Volatiles in Magmas*, Band 30, Seiten 371–411. Mineralogical Society of America.

Winkler-Arndt, M. (1998). Numerische Modellierung von thermischer Konvektion. Master's thesis, J.W. Goethe Universität Frankfurt a.M., Institut für Meteorologie und Geophysik.

Lebenslauf

Vor-, Nachname	Kristian Dieter Gerald Müller
PLZ, Wohnort	65187 Wiesbaden
Geburtsort	Bad Schwalbach
Geburtstag	27.11.1974

Ausbildung

1995	Abitur
1995 - 1996	Bundeswehr
Okt. 1996 - Jan. 2001	Studium der Geophysik an der J.W. Goethe Universität, Frankfurt a.M.
Aug. 2000	Geologisches Feldpraktikum an der University of Southern California (USC, USA)
Jan. 2001	Diplom im Fachgebiet Geophysik Titel: Rheologische Untersuchungen an Silikatglas
Jul. - Okt. 2001	Teilnahme an der AMORE 2001 Expedition (Gakkel Rücken, Arktis, AWI)
Okt. 2000 - Feb. 2004	Zweitstudium der Informatik an der J.W. Goethe Universität, Frankfurt a.M.
Feb. 2001 - dato	Promotionsstudent der Geophysik an der J.W. Goethe Universität, Frankfurt a.M.

Veröffentlichungen

Internal friction spectroscopy in $\text{Li}_2\text{O}-2\text{SiO}_2$ partially crystallised glasses
K.Müller et al.; Non-Crystalline Solides 319 (2003) 44-56

Viscoelastic behaviour of basaltic lavas

M.R. James et al.; Journal of volcanology and geothermal research 132 (2004) 99-113